



HAL
open science

Étude théorique et numérique d'un cyclotron à secteurs séparés en régime de charge d'espace

Viviana Cazoll

► **To cite this version:**

Viviana Cazoll. Étude théorique et numérique d'un cyclotron à secteurs séparés en régime de charge d'espace. Physique des accélérateurs [physics.acc-ph]. Université Paris Sud Orsay, 1988. Français. NNT: . tel-01697598

HAL Id: tel-01697598

<https://in2p3.hal.science/tel-01697598v1>

Submitted on 31 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

T H E S E

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR EN SCIENCE

PAR

Viviana CAZOLL

**SUJET : ETUDE THEORIQUE ET NUMERIQUE D'UN CYCLOTRON A SECTEURS SEPARES
EN REGIME DE CHARGE D'ESPACE**

soutenue le 24 Novembre 1988 devant la Commission d'examen

MM. J. BUON Président
A. DURAND
P. LAPOSTOLLE
A. CHABERT

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

T H E S E

présentée

Pour obtenir

Le **TITRE** de **DOCTEUR EN SCIENCE**

PAR

Viviana CAZOLL

**SUJET : ETUDE THEORIQUE ET NUMERIQUE D'UN CYCLOTRON A SECTEURS SEPARÉS
EN REGIME DE CHARGE D'ESPACE**

soutenu le 24 Novembre 1986 devant la Commission d'examen

MM. J. BUON Président
A. DURAND
P. LAPOSTOLLE
A. CHABERT

REMERCIEMENTS

Il m'est très agréable de témoigner toute ma reconnaissance à tous ceux qui m'ont aidé dans l'aboutissement de ce travail.

Monsieur DETRAZ, Directeur du Grand Accélérateur National d'Ions Lourds m'accueilli dans son laboratoire, je tiens à le remercier.

Je remercie très sincèrement Monsieur GOUTTEFANGEAS, Directeur des Accélérateurs, et Monsieur FERME, Responsable du Groupe Développement, qui m'ont permis d'effectuer ce travail de recherche au sein du Groupe Théorie et Paramètres; les encouragements constants que j'ai toujours trouvés auprès d'eux m'ont été très précieux.

Que Monsieur BUON, Professeur à l'Université de PARIS XI trouve ici l'expression de ma reconnaissance pour la sollicitude et l'appui qu'il m'a prodigués. C'est un grand honneur qu'il me fait en présidant le Jury de cette thèse.

Je remercie vivement Monsieur DURAND, Professeur à l'Université de RENNES, pour avoir accepté de juger mon travail ainsi que pour le temps qu'il m'a consacré.

C'est avec une profonde reconnaissance que j'adresse à Monsieur LAPOSTOLLE tous mes remerciements pour avoir accepté de diriger ce travail de recherche. Son inlassable disponibilité, son intérêt constant manifesté par ses nombreux déplacements à CAEN et ses conseils éclairés, ont permis de mener cette thèse à bien.

Toute ma gratitude va à Monsieur CHABERT qui non seulement a suggéré le sujet de cette étude, mais qui a aussi suivi de très près son évolution. Ce travail dans son ensemble résulte de notre collaboration; je tiens tout particulièrement à le remercier d'y avoir consacré une grande partie de son temps, d'avoir su me faire partager son enthousiasme pour la recherche, et de m'avoir transmis bon nombre de ses connaissances.

Monsieur BARON s'est intéressé à mon travail, qu'il en soit chaleureusement remercié.

Je ne saurais oublier Messieurs BERTRAND et FOLL pour leur concours lors de l'utilisation des calculateurs.

Madame BEX s'est chargée de l'impression finale de ce document, je l'assure de ma reconnaissance.

Enfin, je remercie tous ceux et toutes celles qui par leur aide et par leur présence ont permis le bon déroulement de cette thèse dans une ambiance toujours très agréable.

INTRODUCTION:

Les premières études des effets de la charge d'espace (CE) sur la stabilité et les caractéristiques des faisceaux de particules remontent aux années 60; elles ont dans un premier temps concerné essentiellement le cas des accélérateurs linéaires ⁽¹⁾ et des lignes de transfert^(2,3) et ce n'est que plus récemment que les effets de la CE dans les cyclotrons ont été abordés.

Le désir, manifesté dans de nombreux laboratoires, d'obtenir des faisceaux d'ions intenses à partir de cyclotrons a conduit à amplifier les efforts dans ce domaine^(4,5).

Les effets de la CE dans un cyclotron sont intimement liés à deux caractéristiques de ces machines:

- le faisceau se présente en paquets dont les dimensions transversales et longitudinale sont du même ordre.

- le couplage entre le mouvement longitudinal et le mouvement radial est très fort.

L'étude du comportement d'un faisceau de cyclotron en présence des effets de CE a été abordée soit théoriquement au moyen de formalismes de plus en plus élaborés ^(6,7), soit numériquement par simulation sur ordinateur au moyen de programmes de plus en plus sophistiqués^(8,9).

Dans ce travail nous avons essayé d'établir un modèle théorique simple tenant compte des effets de vortex (forces de Coriolis) mis en évidence par M. M. GORDON ⁽⁶⁾ et de comparer les résultats auxquels il conduit avec ceux issus du programme de simulation NAJO utilisé avec succès lors de l'étude des cyclotrons à secteurs séparés du GANIL.

Notre modèle concerne le mouvement d'un ion appartenant à un paquet et soumis aux forces dues au champ de guidage et au champ accélérateur du cyclotron d'une part et au champ de CE produit par les autres ions du paquet d'autre part. L'exposé de ce modèle est l'objet du Chapitre I.

Les équations développées au premier ordre conduisent à des solutions valables au centre du paquet d'ions, zone où les forces de CE sont pratiquement linéaires. Les frontières du paquet, zone très non linéaire, sont évidemment moins bien analysées théoriquement. L'étude de ces équations fait l'objet du Chapitre II.

Si notre modèle permet de bien comprendre le comportement du coeur des paquets d'ions ($\geq 90\%$ des ions) il ne permet pas d'apprécier l'évolution des 'queues': c'est la simulation qui apportera un complément d'information si nécessaire. La comparaison entre les résultats théoriques et ceux issus de la simulation est faite au Chapitre III.

Enfin nous avons appliqué notre étude au cas particulier d'un injecteur haute intensité CSSO et à cette occasion envisagé quelques méthodes susceptibles de combattre les effets de la CE dans un cyclotron. Ceci fait l'objet du Chapitre IV.

Le programme de simulation est présenté dans l'annexe II qui comporte aussi une étude critique des différentes approximations introduites dans notre code de calcul.

I. DETERMINATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

I.1 LE MODELE UTILISE:

Nous considérons dans un premier temps un cyclotron compact non relativiste (champ magnétique $B_0 = \text{constant}$) dans lequel l'accélération est assimilée à un processus continu.

I.1.1 Le champ accélérateur utilisé:

Le processus d'accélération qui s'effectue de façon discrète dans les intervalles d'accélération des cavités est assimilé à un processus continu au moyen d'un champ tournant en synchronisme avec les ions et qui assure le même gain d'énergie par tour. En fait, cette assimilation revient à ne considérer que les composantes synchrones de la décomposition azimutale en série de Fourier du champ établi dans les intervalles d'accélération. Dans ces conditions, chaque composante et donc leur somme satisfont les équations de Maxwell.

Dans notre modèle, la composante azimutale du champ accélérateur agissant sur un ion est écrite sous la forme:

$$E_{\theta} f(\Omega t - h\theta) = \frac{V_0}{2\pi R} f(\Omega t - h\theta) \quad [1] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Omega t - h\theta = \varphi \\ \theta = \theta_0 + \delta\theta \end{cases}$$

Ω étant la fréquence HF et h l'harmonique d'accélération. $\delta\theta$ est défini pour un ion quelconque, situé au point M de coordonnées (R, θ) par rapport à un ion pris comme référence et situé au même instant au point M_0 de coordonnées (R_0, θ_0) . Dans notre étude V_0 et φ_0 ($\varphi_0 = \Omega t - h\theta_0$) seront pris constants, ce qui veut dire que l'isochronisme est parfait et que le gain d'énergie par tour, donc la tension sur les électrodes d'accélération, sont indépendants du rayon.

Dans le cas d'une onde purement sinusoïdale:

$$V_0 f(\Omega t - h\theta) = V_0 \cos(\Omega t - h\theta)$$

Dans ces conditions, le gain d'énergie dépend de la phase des ions, mais nous pouvons aussi considérer une somme d'ondes sinusoïdales qui permet d'obtenir un gain d'énergie pratiquement constant sur une extension en phase importante (accélération sur un plateau de champ).

I.1.2 Les termes du premier ordre:

Nous allons établir les équations décrivant les écarts entre un ion quelconque appartenant à un paquet de particules et une particule idéale, prise comme étant la particule de référence.

Dans un référentiel cylindrique (R_0, θ_0, z) lié au centre du cyclotron les équations qui décrivent le mouvement d'une particule M_0 dans le plan médian sont:

$$dR_0/d\theta_0 = \dot{R}_0 = q/(m \omega^2) E_\theta(R_0, \varphi_0) \quad [2]$$

$$d^2R_0/d\theta_0^2 = \ddot{R}_0 = q/(m \omega^2) E_r(R_0, \varphi_0) \quad [3]$$

les dérivées étant prises par rapport à la variable θ_0 et :

$$\Omega/h = \omega = qB_0/m = d\theta_0/dt \quad (\vec{B} = -B_0 \vec{u}_z)$$

Si $\ddot{R}_0 \neq 0$, c'est à dire dès que $\dot{R}_0 \neq \text{const}$, l'équation [3] implique l'existence d'un champ E_r et, nous pouvons montrer que E_θ défini par [1] et E_r qui découle de [3] ne satisfont pas les équations de Maxwell dans le vide ($\rho = J = 0$). En réalité dans un cyclotron la trajectoire de la particule centrale oscille autour d'une trajectoire idéale qui est celle que nous décrivons grâce aux équations [2] et [3]. L'introduction d'un champ E_r apparaît alors comme un artifice permettant d'obtenir cette trajectoire idéale qui peut être prise comme trajectoire de référence : comme nous ne nous intéressons qu'aux écarts entre les trajectoires des différents ions l'existence réelle de la trajectoire de référence n'est pas nécessaire. Autrement dit, dans le cas où $\dot{R}_0 \neq 0$ et en employant la terminologie habituelle des faisceaux de particules, nous observerons toujours une oscillation cohérente du faisceau (oscillation de l'ensemble du faisceau) autour de la trajectoire idéale fictive définie par [2] et [3]. Notre étude ne concerne que les oscillations incohérentes; dans l'approximation linéaire que nous serons amenés à utiliser les deux types d'oscillation sont indépendants: l'artifice que consiste à introduire le champ E_r est justifié, cette composante s'éliminera d'elle même lors de la détermination des équations décrivant les oscillations incohérentes. Dans les simulations ce comportement du faisceau apparaîtra très clairement.

Dans notre étude, les quantités :

$$r/R_0 = (R - R_0)/R_0 \quad ; \quad \ell/R_0 = \delta\theta \quad ; \quad z/R_0 \quad [4]$$

qui lient la position d'une particule quelconque à celle de la particule de référence sont considérées comme des termes du premier ordre ainsi que la quantité \dot{R}_0/R_0 , liée au pas de spiralisation σ défini par:

$$\frac{\sigma}{2\pi R_0} = \frac{\dot{R}_0}{R_0} = \frac{q}{m \omega^2 R_0} E_\theta(R_0) f(\varphi_0) \quad [5]$$

Il en résulte qu'au premier ordre l'énergie de la particule de référence est:

$$W_0 = \frac{m \omega^2 R_0^2}{2} \left(1 + \left(\dot{R}_0 / R_0 \right)^2 \right) \approx \frac{m \omega^2 R_0^2}{2} \quad [6]$$

I.2 EQUATIONS DU MOUVEMENT D'UNE PARTICULE QUELCONQUE:

I.2.1 Changement de référentiel:

Soient \vec{OX} , \vec{OY} et \vec{Oz} les axes d'un repère en rotation avec la vitesse angulaire ω , l'axe \vec{OX} étant lié à notre particule de référence M_0 .

Les coordonnées d'une particule M dans ce repère sont, en nous limitant au plan médian (cf. figure 1) :

$$X = OM_x = R_0 + r \quad Y = M_0 M_y = \ell$$

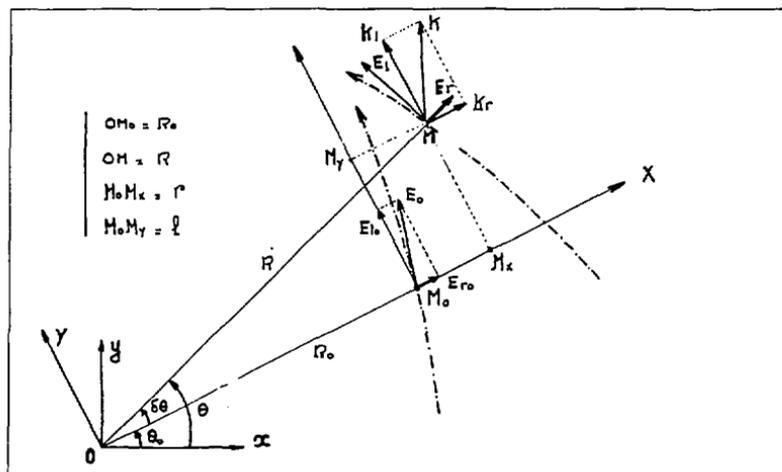


figure 1

Les équations de Lagrange, lorsque les dérivées sont prises par rapport à la variable θ_0 , s'écrivent (T : énergie cinétique; Q : force généralisée):

$$\frac{d}{d\theta_0} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad \begin{cases} q_j = X \text{ ou } Y \\ \dot{q}_j = \dot{X} \text{ ou } \dot{Y} \end{cases} ; Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_j} \quad [7]$$

et les formules classiques de transformation des vitesses conduisent aux relations:

$$w_x = \dot{X} - Y \quad w_y = \dot{Y} + X$$

qui nous permettent de calculer $T/m\omega^2 = W_0/m\omega^2$ en termes de X, Y, \dot{X}, \dot{Y} :

$$T/m\omega^2 = 1/2 \left(X^2 + Y^2 + \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + 2(\dot{Y}X - \dot{X}Y) \right) \quad [8]$$

et d'obtenir les équations du mouvement:

$$(\ddot{X} - \dot{Y}) - (X + \dot{Y}) = Q_X/m \omega^2 \quad [9]$$

$$(\ddot{Y} + \dot{X}) - (Y - \dot{X}) = Q_Y/m \omega^2 \quad [10]$$

I.2.2 Les forces qui agissent sur un ion dans le repère mobile:

Les forces magnétiques (\vec{F}_M) créées par le champ statique \vec{B} sont calculées dans le repère fixe, puis projetées dans le repère en rotation dans l'approximation non relativiste. Les forces électriques (\vec{F}_E) dues au champ accélérateur sont développées autour de la position M_0 de la particule idéale et ce dans le repère en rotation. Nous verrons que le champ devient purement électrostatique.

De plus, pour tenir compte de la structure magnétique d'un cyclotron réel, nous avons introduit une force de focalisation radiale (\vec{F}_{FOC}) qui ramène chaque ion sur l'orbite d'équilibre qui correspond à son énergie $W_0 + \delta W$ et qui est caractérisée par le nombre d'onde radiale ν_{r0} .

Cette force provient en réalité, d'une part, de l'augmentation du champ magnétique moyen avec le rayon, augmentation nécessaire pour assurer l'isochronisme ($B/\gamma = \text{cste}$) et d'autre part de la structure magnétique elle-même (secteurs séparés droits ou spiralés). Nous aurons :

$$\nu_{r0}^2 = \nu_{r\text{-iso.}}^2 + \nu_{r\text{-str.}}^2$$

avec $\nu_{r\text{-iso.}}^2 = 1 - \bar{n}$; $\bar{n} = -R/B(R) \partial B/\partial R < 0$ et $\nu_{r\text{-str.}}$ dépendant de la structure magnétique du cyclotron.

L'effet de cette force sur des particules situées à la distance δr de leur trajectoire d'équilibre sera pris égal à:

$$F_{FOC} = m \omega^2 (\nu_{r0}^2 - 1) \delta r$$

par ailleurs, la trajectoire d'équilibre d'une particule dont la déviation en énergie est δW est caractérisée au premier ordre par :

$$\delta r_0 \approx R_0/2 (\delta W / W_0)$$

et comme $r = \delta r_0 + \delta r$ nous obtenons:

$$F_{FOC} = m \omega^2 (\nu_{r0}^2 - 1) (r - R_0 \delta W / (2 W_0))$$

L'expression $R_0 \delta W / (2 W_0)$ ne tient pas compte des propriétés dispersives du champ magnétique: dans notre modèle nous l'avons pris constant.

Enfin, nous tenons compte des forces de CE (\vec{F}_{CE}) produites par le champ \vec{K} de CE.

Les expressions de toutes ces forces sont, dans le plan médian :

$$\vec{F}_H / m\omega^2 \begin{cases} - (\dot{Y} + X) \\ (\dot{X} - Y) \end{cases} \quad [11] \quad \vec{F}_E / m\omega^2 \begin{cases} q/m\omega^2 E_x \\ q/m\omega^2 E_y \end{cases} \quad [12]$$

$$\vec{F}_{CE} / m\omega^2 \begin{cases} q/m\omega^2 K_r \\ q/m\omega^2 K_z \end{cases} \quad [13] \quad \vec{F}_{FOC} / m\omega^2 \begin{cases} -(\nu_{r0}^2 - 1)(r - R_0 \delta W / (2 W_0)) \\ 0 \end{cases} \quad [14]$$

et les équations [9] et [10] s'écrivent finalement :

$$\ddot{X} - \dot{Y} = \frac{q}{m \omega^2} (E_x + K_r) - (\nu_{r0}^2 - 1) \left(r - \frac{R_0}{2} \frac{\delta W}{W_0} \right) \quad [15]$$

$$\ddot{Y} + \dot{X} = \frac{q}{m \omega^2} (E_y + K_z) \quad [16]$$

I.2.3 Développement des équations de premier ordre:

Nous développons le champ E_θ autour du point M_0 , soit :

$$\begin{aligned} \delta\theta &= \ell/R_0 & \delta\varphi &= -h \delta\theta \\ E_\theta(R_0 + r) f(\varphi_0 + \delta\varphi) &= \left(E_\theta(R_0) + r \left. \frac{dE_\theta}{dR} \right|_{R_0} \right) f(\varphi_0) \left(1 + \frac{\ell}{R_0} n_z \right) \\ &\text{avec } n_z = - \left. \frac{h}{f(\varphi_0)} \frac{df}{d\varphi_0} \right|_0 = \text{const} \end{aligned} \quad [17]$$

qui au premier ordre devient :

$$E_\theta(R_0 + r) f(\varphi_0 + \delta\varphi) = E_\theta(R_0) f(\varphi_0) (1 - r/R_0 + n_z \ell/R_0) \quad [18]$$

Notons que pour l'accélération à $\varphi_0 = \text{const}$, $n_z = h \text{tg } \varphi_0$ et en particulier $n_z = 0$ pour l'accélération au sommet de la cosinusoïde: l'approximation linéaire revient à considérer un plateau de champ parfait.

Les champs E_x et E_y qui interviennent dans les équations [15] et [16] sont exprimés en fonction des composantes E_θ et E_R du champ accélérateur. Cependant, pour l'étude au premier ordre du mouvement relatif des particules M et M_0 , la composante fictive E_R n'intervient pas (elle est la même en M et M_0), il en résulte que seule la composante E_θ intervient, d'où :

$$E_x = -E_\theta \sin \delta\theta \quad E_y = E_\theta \cos \delta\theta \quad [19]$$

Il en résulte que :

$$E_x - E_{x0} = \delta E_x = -E_{\theta 0} \ell / R_0 \quad E_y - E_{y0} = \delta E_y = -E_{\theta 0} r / R_0 + E_{\theta 0} n_z \ell / R_0 \quad [20]$$

Dans cette représentation linéaire locale, le champ $\delta \vec{E}$ ne dépend pas du temps : dans le repère en mouvement le champ devient purement électrostatique ($\delta \vec{B} = 0$) avec les composantes δE_x , δE_y , δE_z qui s'en déduisent à partir de $\text{div } \delta \vec{E} = 0$. Nous avons alors :

$$\delta E_z = -E_{\theta 0} n_z z / R_0 \quad [21]$$

Nous pouvons maintenant introduire l'équation décrivant le mouvement axial en tenant compte du fait que pour ce mouvement :

- le champ électrique n'intervient qu' à travers δE_z .
- le champ de CE est représenté par K_z (composante axiale).
- la structure magnétique introduit une force de focalisation axiale caractérisée par ν_{z0} provenant comme ν_{r0} de l'effet de la croissance du champ d'une part (force défocalisante) et de la structure de l'aimant d'autre part :

$$\nu_{z0}^2 = \bar{n} + \nu_{z-sr}^2 > 0$$

Finalement le système des trois équations, développées au premier ordre, s'écrit :

$$\ddot{r} + \left(\nu_{r0}^2 - 1 \right) \left\{ r - \frac{R_0}{2} \frac{\delta W}{W_0} \right\} - \dot{\ell} = \frac{q}{m \omega^2} K_r - \frac{\dot{R}_0}{R_0} \ell \quad [22]$$

$$\ddot{\ell} + \dot{r} = \frac{q}{m \omega^2} K_\ell - \frac{\dot{R}_0}{R_0} (r - n_z \ell) \quad [23]$$

$$\ddot{z} + \nu_{z0}^2 z = \frac{q}{m \omega^2} K_z - \frac{\dot{R}_0}{R_0} n_z z \quad [24]$$

Enfin, la dispersion en énergie est donnée par l'équation :

$$\delta\dot{W} = q \left\{ (\vec{E} \cdot \vec{\epsilon}(\varphi) + \vec{K}) \cdot \vec{w} - \vec{E}_0 \cdot \vec{\epsilon}(\varphi_0) \cdot \vec{w}_0 \right\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} w_{0x} = \dot{P}_0 \\ w_{0y} = R_0 \end{cases}$$

qui, développée au premier ordre donne ($E_r = 0; \dot{R}_0 = 0$) :

$$\frac{R_0}{2} \frac{\delta\dot{W}}{W_0} = \frac{q}{m \omega^2} \left\{ K_\ell \left(1 + \frac{r}{R_0} + \frac{\dot{\ell}}{R_0} \right) + K_r \left(\frac{\dot{R}_0}{R_0} + \frac{\dot{r}}{R_0} - \frac{\dot{\ell}}{R_0} \right) \right\} + \frac{\dot{R}_0}{R_0} (n_\ell \ell + \dot{\ell}) \quad [25]$$

De plus, comme $\dot{W}_0/W_0 = 2 \dot{R}_0/R_0$, nous avons $\frac{R_0}{2} \frac{\delta\dot{W}}{W_0} = \frac{d}{d\theta_0} \left(\frac{R_0}{2} \frac{\delta W}{W_0} \right) + \frac{\dot{R}_0}{2} \frac{\delta W}{W_0}$

et finalement, en adoptant les notations simplifiées :

$$\delta W \text{ pour } \frac{R_0}{2} \frac{\delta W}{W_0} \quad K_i \text{ pour } \frac{q}{m \omega^2} K_i \quad i = r, \ell \text{ ou } z \quad [26]$$

nous obtenons le système d'équations décrivant les petits mouvements d'une particule autour de la particule de référence :

$$\ddot{r} + (\nu_{r0}^2 - 1)(r - \delta W) - \dot{\ell} = K_r - \frac{\dot{R}_0}{R_0} \ell \quad [27]$$

$$\ddot{\ell} + \dot{r} = K_\ell - \frac{\dot{R}_0}{R_0} (r - n_\ell \ell) \quad [28]$$

$$\ddot{z} + \nu_{z0}^2 z = K_z - \frac{\dot{R}_0}{R_0} n_\ell z \quad [29]$$

$$\delta\dot{W} + \frac{\dot{R}_0}{R_0} \delta W = K_\ell \left(1 + \frac{r}{R_0} + \frac{\dot{\ell}}{R_0} \right) + K_r \left(\frac{\dot{R}_0}{R_0} + \frac{\dot{r}}{R_0} - \frac{\dot{\ell}}{R_0} \right) + \frac{\dot{R}_0}{R_0} (n_\ell \ell + \dot{\ell}) \quad [30]$$

I.2.4 Intégrale du mouvement:

Si nous pouvons considérer que les forces de CE, K_r et K_ℓ , sont du premier ordre, alors [30] devient:

$$\delta \dot{W} + \frac{\dot{R}_0}{R_0} \delta W = K_\ell + \frac{\dot{R}_0}{R_0} (n_\ell \ell + \dot{\ell}) \quad [31]$$

La déviation d'énergie ne provient, dans cette approximation, que de la composante longitudinale des forces de CE et de l'accélération.

A partir de [28] et [31], nous trouvons:

$$R_0 \dot{\ell} + \dot{R}_0 \ell + R_0 \dot{r} + \dot{R}_0 r = R_0 \delta \dot{W} + \dot{R}_0 \delta W$$

qui conduit à l'intégrale première du mouvement :

$$\boxed{R_0 (\dot{\ell} + r - \delta W) = Cste} \quad [32]$$

Compte tenu des hypothèses prises, ce résultat est valable pour tout cyclotron en présence ou non d'accélération et des effets de CE.

I.3 EXPRESSION DES FORCES DE CE DANS UN ELLIPSOÏDE:

Les dimensions effectives du faisceau sont définies par :

$$\Delta x = 2 \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = 2 \sigma_x \quad [33]$$

Δx est le demi-axe de l'ellipsoïde équivalent pour la variable x .

De même les émittances effectives dans le plan xy seront données par:

$$\epsilon_{xy} = \sqrt{\Delta x^2 \Delta y^2 - 16 (\langle x.y \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle)^2} \quad [34]$$

(10)

I.3.1 Ellipsoïde de révolution unif. ément chargé:

Les forces de CE à l'intérieur d'un tel ellipsoïde supposé isolé dans l'espace sont linéaires : $K_x = K_{x0} x$, avec $x = r, \ell$ ou z .

En utilisant la notation abrégée :

$$K_{x0} \text{ pour } q/(m\omega^2)K_{x0} \quad [35]$$

nous avons (ρ : densité des ions dans l'ellipsoïde, $q = Qe$: charge des ions et $\xi = \Delta \ell / \Delta r$) :

$$K_{\ell 0} = \frac{Qe \rho}{m\omega^2 \epsilon_0} g(\xi) \quad [36a]$$

$$K_{r 0} = \frac{Qe \rho}{2m\omega^2 \epsilon_0} (1 - g(\xi)) \quad [36b]$$

et puisque l'ellipsoïde est de révolution autour de ℓ , $\Delta z = \Delta r$ et $K_{z0} = K_{r0}$.

L'expression de $g(\xi)$ et sa représentation sont données sur la figure 2.

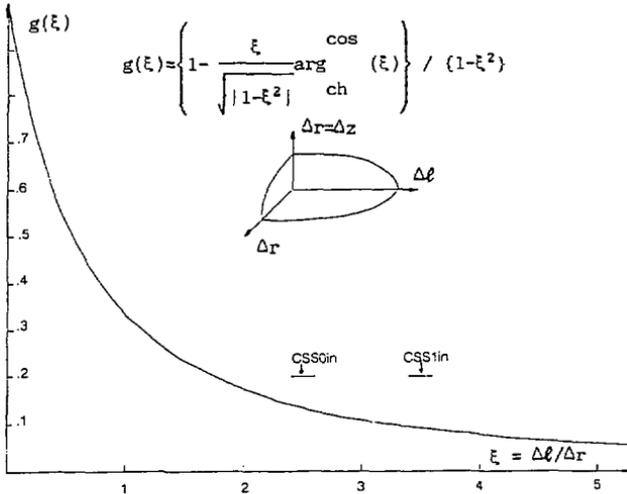


figure 2

En explicitant ρ/ϵ_0 nous obtenons pour un faisceau de N ions/s :

$$K_\ell = K_{\ell 0} \ell = 2 \frac{Q^2 N}{A \omega^3} c^2 r_0 \frac{3 \pi}{\Delta r^2 h \Delta \ell} g(\xi) \ell \quad [37a]$$

$$K_r = K_{r 0} r = \frac{Q^2 N}{A \omega^3} c^2 r_0 \frac{3 \pi}{\Delta r^2 h \Delta \ell} (1 - g(\xi)) r \quad [37b]$$

avec $r_0 = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 m_0 c^2} = 1.5347 \cdot 10^{-18}$ mètre, A : numéro atomique.

Dans le chapitre III nous donnons l'ordre de grandeur des forces de CE dans le cas du CSS1 du GANIL: elles doivent bien sûr demeurer plus petites que les forces de focalisation et en général nous pourrions les considérer comme des perturbations.

Nous utiliserons les expressions [37a] et [37b] des forces de CE dans l'étude théorique.

(3,19)

I.3.2. Ellipsoïde avec une distribution gaussienne :

La distribution de charges :

$$\rho = \rho_0 \exp - \frac{1}{2} \left(\frac{\ell^2}{\sigma_\ell^2} + \frac{r^2}{\sigma_r^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2} \right) \quad [38]$$

donne le potentiel :

$$V(\ell, r, z) = - Qe \frac{\rho_0}{2 \epsilon_0} \sigma_\ell \sigma_r \sigma_z \int_0^{\infty} \frac{\exp - \frac{1}{2} \left(\frac{\ell^2}{\sigma_\ell^2 + t} + \frac{r^2}{\sigma_r^2 + t} + \frac{z^2}{\sigma_z^2 + t} \right)}{\sqrt{(\sigma_\ell^2 + t)(\sigma_r^2 + t)(\sigma_z^2 + t)}} dt \quad [39]$$

à partir duquel nous trouvons les forces s'exerçant sur les ions :

$$K_{x0} x = \frac{Q^2 N}{A \omega^3} c^2 r_0 2 \frac{\sqrt{2} \pi}{h} I_x x \quad [40]$$

$$\text{avec } I_x = 32 \int_0^{\infty} \frac{\exp - \frac{1}{2} \left(\frac{\ell^2}{\sigma_\ell^2 + t} + \frac{r^2}{\sigma_r^2 + t} + \frac{z^2}{\sigma_z^2 + t} \right)}{(\sigma_x^2 + t) \sqrt{(\sigma_\ell^2 + t)(\sigma_r^2 + t)(\sigma_z^2 + t)}} dt \quad [41]$$

Nous utiliserons l'expression [40] des forces de CE dans la simulation.

I.3.3 Comparaison des deux distributions:

Sur la figure 3 nous comparons les résultats donnés par [37a], [37b] d'une part et [40] d'autre part dans le cas de deux ellipsoïdes de révolution avec le même nombre de particules ($\Delta l = 3 \times \Delta r = 3 \times \Delta z$ et $\Delta l = \Delta r = 3 \times \Delta z$) représentatifs du faisceau qui sera étudié en III : les résultats correspondent, pour chaque composante (K_r, K_z, K_l), aux valeurs sur l'axe concerné.

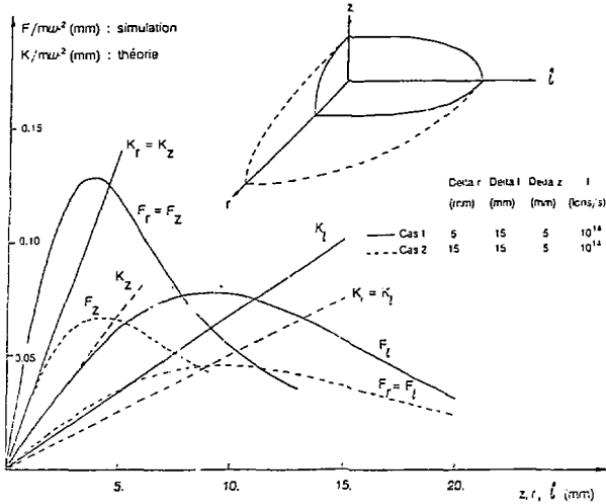


figure 3

Les forces données par la distribution uniforme sont inférieures à l'intérieur du paquet à celles données par la distribution gaussienne et ce d'autant plus que nous les évaluons plus près du centre : à cet endroit, la concentration des particules dans la distribution gaussienne est supérieure à celle de la distribution uniforme.

L'étude théorique, dans laquelle nous utilisons les forces linéaires données par une distribution uniforme, n'est valable qu'à l'intérieur du paquet équivalent et, de plus, les forces sont sous-estimées par rapport au calcul gaussien qui est utilisé dans la simulation. Cependant le facteur entre les valeurs concernant les deux distributions reste $\lesssim 2$.

Dans notre étude théorique nous ne tenons pas compte des effets d'image et des effets des paquets adjacents. L'étude numérique montre que leur influence sur la dynamique des ions est très faible dans les cas que nous avons considérés (cf. annexe II).

Sous l'effet des forces de CE la dimension transversale Δr va augmenter comme conséquence de l'accroissement de la dispersion en énergie ΔW ; de même en présence d'accélération, Δl va augmenter (à priori comme R_0); il en résulte que les forces de CE vont diminuer. Cet effet de la variation de la forme et du volume du paquet d'ions ne peut pas facilement être pris en compte dans notre étude théorique. C'est donc en ayant ces limitations présentes à l'esprit que nous devons comparer les résultats issus de la théorie à ceux donnés par la simulation.

II. ETUDE THEORIQUE DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

II.1 ETUDE THEORIQUE DU MOUVEMENT AXIAL :

Le mouvement axial décrit par (cf. [29] et [35]) :

$$\ddot{z} + (\nu_{z0}^2 - K_{z0} + \dot{R}_0/R_0 n_z) z = 0$$

apparaît parfaitement découplé du mouvement dans le plan médian, du moins dans l'hypothèse où les dimensions du paquet sont constantes (en fait, un certain couplage intervient à travers K_{z0} qui dépend de Δr et $\Delta \ell$).

Pour un faisceau supposé de dimensions constantes, l'effet des forces de CE se traduit par une simple diminution du nombre d'onde :

$$\nu_z = \nu_{z0} \sqrt{1 - \frac{K_{z0}}{\nu_{z0}^2}} \approx \nu_{z0} \left(1 - \frac{K_{z0}}{2 \nu_{z0}^2} \right) \quad [42]$$

et impose une limite supérieure au rapport K_{z0}/ν_{z0}^2 : ν_z^2 doit rester positif et nous pouvons aussi vouloir éviter certaines résonances.

L'oscillation, à K_{z0} constant et $n_z = 0$, est décrite par :

$$z = z_i \cos \nu_z \theta_0 + \frac{z_i}{\nu_z} \sin \nu_z \theta_0 \quad [43]$$

cependant, en considérant que ν_z varie adiabatiquement, nous aurions :

$$z \approx z_i \sqrt{\frac{\nu_{zi}}{\nu_z}} \cos \int_0^{\theta} \nu_z d\theta + \frac{z_i}{\sqrt{\nu_{zi} \nu_z}} \sin \int_0^{\theta} \nu_z d\theta \quad [44]$$

En présence d'accélération, la force axiale de CE diminue comme $W_0^{-1/2}$ pour un paquet de dimensions Δr , Δz et $\Delta \varphi$ constantes ($\Delta \ell$ varie comme $R_0 \propto W_0^2$ et $(1-g(\xi))$ varie doucement) et cette diminution sera encore accentuée par l'augmentation des dimensions du paquet; il en résulte que ν_z tendra vers ν_{z0} et que l'amplitude des oscillations va diminuer comme $1/\sqrt{\nu_z}$.

Enfin, l'adaptation du faisceau impose à l'injection (ch. III.1.2) :

$$\Delta z_i = \frac{\Delta z_i}{\nu_{zi}} = \frac{R_{0i}}{\nu_{zi}} \left(\frac{d \Delta z}{R_0 d\theta} \right) \quad [45]$$

et dépend donc de l'intensité.

La comparaison de ces résultats avec ceux issus de la simulation sera faite en III.

II.2 ETUDE THEORIQUE DU MOUVEMENT DANS LE PLAN MEDIAN:

II.2.1 Etude du mouvement en absence d'accélération ($\dot{R}_0=0$):

II.2.1.1. Sans effet de CE ($\tilde{K}=0$):

Le mouvement dans le plan médian est décrit par [27] et [32] avec $\delta W = \text{Cste}$ d'après [30], c'est-à-dire par :

$$\ddot{r} + (\nu_{r0}^2 - 1)(r - \delta W) - \dot{\ell} = 0 \quad [46]$$

$$\dot{\ell} + r - \delta W = \text{Cste} \quad [47]$$

Reportons [47] dans [46], nous obtenons :

$$\ddot{r} + \nu_{r0}^2(r - \delta W) = \text{Cste} \quad [48]$$

dont les solutions pour $\delta W = 0$ et $\delta W \neq 0$ illustrées sur la figure 4 (courbes 1 et 2) ont pour équation :

$$r - \delta W = (r_i - \delta W) \cos \nu_{r0} \theta_0 + \frac{r_i}{\nu_{r0}} \sin \nu_{r0} \theta_0 + \frac{\text{Cste}}{\nu_{r0}^2} \quad [49]$$

Si nous injectons les particules avec la corrélation: $r_{ic} = r_i + \delta W_i$, r_i correspondant à l'émission monochromatique adaptée et que nous regardons la variable décorrélée:

$$r_{dc} = r - \delta W \quad [50]$$

alors les particules homologues de chaque émission monochromatique effectuent les mêmes oscillations autour de l'orbite d'équilibre $R_0 + \delta W$ correspondant à leur énergie : figure 4 , courbe 3.

La constante intervenant dans [47] est donc nulle, l'intégrale première devient :

$$\dot{\ell} + r - \delta W = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\ell} + r_{dc} = 0 \quad [32]$$

et l'équation [46] compte tenu de [50] donne $\ddot{r} - \nu_{r0}^2 \dot{\ell} = 0$ soit:

$$\ell_{dc} = \ell - \frac{r}{\nu_{r0}^2} = \text{Cste} \quad [51]$$

Cette constante n'est pas autre chose que la variable décorrélée ℓ_{dc} , liée automatiquement à r_{dc} du fait des relations symplectiques dans la ligne de transfert précédant tout accélérateur⁽¹¹⁾. En absence de CE, ℓ_{dc} est une constante du mouvement.

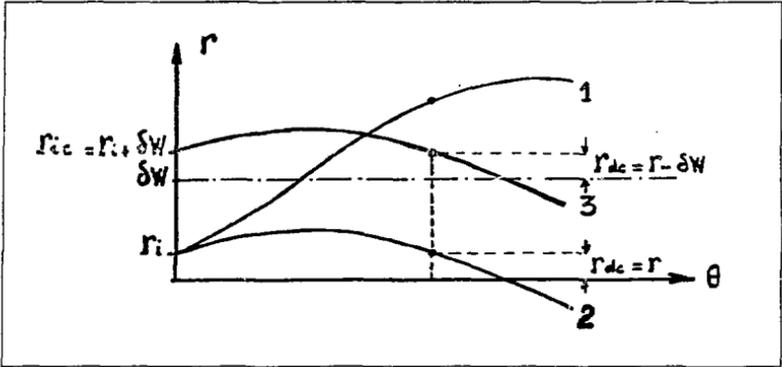


Figure 4 $\begin{cases} \delta W = 0 & (\text{courbe 2}) \quad r = r_{dc} \\ \delta W \neq 0 & (\text{courbe 1: injection sans corrélation}) \\ \delta W \neq 0 & (\text{courbe 3: injection avec corrélation}) \end{cases}$

Le mouvement dans le plan médian est finalement décrit par :

$$\begin{cases} r - \delta W = (r_i - \delta W_i) \cos \nu_{r0} \theta_0 + r_i / \nu_{r0} \sin \nu_{r0} \theta_0 \\ \ell - \ell_{dc} = r_i / \nu_{r0}^2 \cos \nu_{r0} \theta_0 - (r_i - \delta W_i) / \nu_{r0} \sin \nu_{r0} \theta_0 \end{cases} \quad [52]$$

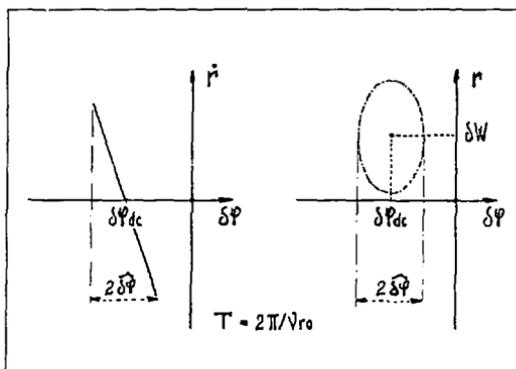
ou en posant $C = \sqrt{(r_i - \delta W_i)^2 + (r_i / \nu_{r0})^2}$

$$\operatorname{tg} \alpha = (r_i / \nu_{r0}) / (r_i - \delta W_i) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \delta \varphi \\ \delta \varphi_{dc} \end{pmatrix} = - \frac{h}{R_0} \begin{pmatrix} \ell \\ \ell_{dc} \end{pmatrix}$$

par :

$$\begin{cases} r - \delta W = C \cos(\nu_{r0} \theta_0 - \alpha) \\ \delta \varphi - \delta \varphi_{dc} = (h/R_0) C / \nu_{r0} \sin(\nu_{r0} \theta_0 - \alpha) \end{cases} \quad [53]$$

Les schémas de la figure 5 illustrent ces résultats.



$$\text{figure 5} \left\{ \begin{array}{l} \delta\varphi_{dc} = \delta\varphi_{dc,i} = \delta\varphi + hr'/v_{r0}^2 = \text{Cste} \\ \delta W = \delta W_i = \text{Cste} \\ r_{dc} = r - \delta W = r - \delta W_i \end{array} \right.$$

En conclusion :

* le faisceau injecté dans un cyclotron doit :

- être adapté bêtratroniquement ($\Delta z / \Delta z$ et $\Delta r / \Delta r$, figure 6 a)
- avoir les corrélations $(\delta W - r)$, $(r - \delta\varphi)$ et $(r_{dc} - \ell)$ nécessaires, de façon à limiter l'amplitude des oscillations⁽¹²⁾ (fig 6, schémas b et c).

* le mouvement d'une particule dans le plan médian $r - \delta\varphi$ est représenté par une ellipse centrée en $(\delta W, \delta\varphi_{dc})$ et la phase ne demeure pas constante (voir schéma figure 5) : l'isochronisme rigoureux n'est donc assuré que pour la particule de référence!

La comparaison avec la simulation sera faite dans III.

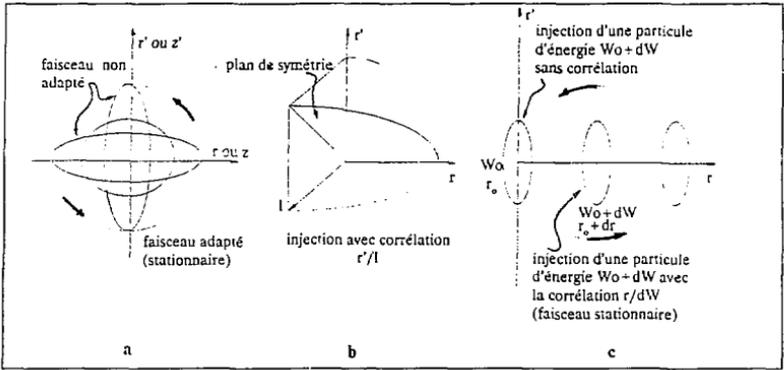


Figure 6 $\left\{ \begin{array}{l} \text{a- Adaptation } r' - r \text{ ou } z' - z \\ \text{b- Corrélation } r' - \varphi \\ \text{c- Corrélation } r - \delta W \end{array} \right.$

II.2.1.2 Avec effet de CE ($\vec{K} \neq 0$):

Le système d'équations devient:

$$\ddot{r} + (\nu_{r0}^2 - 1)(r - \delta W) - \dot{\ell} = K_{r0} r \quad [55]$$

$$\dot{\ell} + r = \delta W \quad [56]$$

$$\delta \dot{W} = K_{\ell 0} \ell \quad [57]$$

Dans [56] nous avons posé à nouveau la constante d'intégration de l'équation [32] nulle, puisque le résultat que nous avons obtenu précédemment est valable pour toute valeur de \vec{K} ($\vec{K} = 0$ ou $\vec{K} \neq 0$).

En combinant les équations précédentes et leurs dérivées nous obtenons (l'ordre de dérivation est indiqué par un chiffre en haut et à droite de la variable concernée, le détail des calculs est donné dans l'annexe I.1):

$$r^{(4)} + \left[\nu_{r0}^2 - (K_{r0} + K_{\ell 0}) \right] r^{(2)} + K_{r0} K_{\ell 0} = 0 \quad [58]$$

d'où les nouveaux nombres d'onde donnés par :

$$\nu_r^4 - \left[\nu_{r0}^2 - (K_{r0} + K_{\ell 0}) \right] \nu_r^2 + K_{r0} K_{\ell 0} = 0 \quad [59]$$

soit, en appelant $\nu_{CE}^2 = \left[\nu_{r0}^2 - (K_{r0} + K_{\ell 0}) \right]$

les deux solutions:

$$\nu_{r1-2}^2 = \frac{\nu_{CE}^2}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 K_{r0} K_{\ell 0}}{\nu_{CE}^4}} \right) \quad [60]$$

qui demeurent réelles tant que $\nu_{r0} \gg \sqrt{K_{r0}} + \sqrt{K_{\ell 0}}$; cette relation conduit à une intensité limite pour un paquet de dimensions déterminées. En tenant compte des expressions [37a] et [37b] des forces de CE:

$$\dot{N}_{lim} \leq \nu_{r0}^2 (A h \omega^3 \Delta r^2 \Delta \ell) / \left(3\pi q^2 c^2 r_0 (\sqrt{2g(\xi)} + \sqrt{1-g(\xi)}) \right) \quad [61]$$

Dans la mesure où $(4 K_{r0} K_{\ell 0}) \ll \nu_{CE}^4$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_{r1}^2 \approx \frac{K_{r0} K_{\ell 0}}{\nu_{r0}^2 - (K_{r0} + K_{\ell 0})} \ll 1 \\ \nu_{r2}^2 \approx \nu_{r0}^2 - (K_{r0} + K_{\ell 0}) = \nu_{CE}^2 \end{array} \right. \quad [62a]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_{r1}^2 \approx \frac{K_{r0} K_{\ell 0}}{\nu_{r0}^2 - (K_{r0} + K_{\ell 0})} \ll 1 \\ \nu_{r2}^2 \approx \nu_{r0}^2 - (K_{r0} + K_{\ell 0}) = \nu_{CE}^2 \end{array} \right. \quad [62b]$$

Ces deux fréquences peuvent être obtenues directement à partir de l'équation [58] si nous remarquons que:

- en négligeant le produit $K_{r0} K_{\ell 0}$ nous "effaçons" la fréquence lente ν_{r1} et il ne reste que l'oscillation bétatron avec bien sûr une diminution du nombre d'onde ν_{r0} qui devient ν_{CE} .

- en négligeant $r^{(4)}$ nous obtenons uniquement la fréquence lente ν_{r1} ; ceci revient à moyenner l'oscillation bétatron de fréquence $\nu_{r2} \gg \nu_{r1}$.

Pour le mouvement en ℓ nous trouvons exactement la même équation que pour le mouvement en r et compte tenu de [57] les expressions de r , ℓ et δW s'écrivent:

$$r = A_r \cos \nu_{r1} \theta_0 + \frac{B_r}{\nu_{r1}} \sin \nu_{r1} \theta_0 + (r_i - A_r) \cos \nu_{r2} \theta_0 + \frac{(r_i - B_r)}{\nu_{r2}} \sin \nu_{r2} \theta_0 \quad [63]$$

$$\ell = A_\ell \cos \nu_{r1} \theta_0 + \frac{B_\ell}{\nu_{r1}} \sin \nu_{r1} \theta_0 + (\ell_i - A_\ell) \cos \nu_{r2} \theta_0 + \frac{(\ell_i - B_\ell)}{\nu_{r2}} \sin \nu_{r2} \theta_0 \quad [64]$$

$$\delta W = K_{\ell 0} \left(\frac{A_\ell}{\nu_{r1}} \sin \nu_{r1} \theta_0 - \frac{B_\ell}{\nu_{r1}^2} \cos \nu_{r1} \theta_0 + \frac{\ell_i - A_\ell}{\nu_{r2}} \sin \nu_{r2} \theta_0 - \frac{(\ell_i - B_\ell)}{\nu_{r2}^2} \cos \nu_{r2} \theta_0 \right) + C \quad [65]$$

Les constantes A_ℓ , B_ℓ , A_r , B_r et C sont déterminées à partir des conditions initiales et de [56] ; nous obtenons $C = 0$ et :

$$A_r = \frac{\nu_{r2}^2 (\nu_{r1}^2 + K_{\ell 0})}{K_{\ell 0} (\nu_{r2}^2 - \nu_{r1}^2)} \left(\dot{\ell}_i \left(1 + \frac{K_{\ell 0}}{\nu_{r2}^2} \right) + r_i \right) \approx \delta W_i$$

$$B_r = \frac{(\nu_{r2}^2 + K_{\ell 0}) (\nu_{r1}^2 + K_{\ell 0})}{(\nu_{r2}^2 - \nu_{r1}^2)} \left(\ell_i - \frac{\dot{r}_i}{(\nu_{r2}^2 + K_{\ell 0})} \right) \approx K_{\ell 0} \ell_{dc1}$$

$$A_\ell = \frac{(\nu_{r2}^2 + K_{\ell 0})}{(\nu_{r2}^2 - \nu_{r1}^2)} \left(\ell_i - \frac{\dot{r}_i}{(\nu_{r2}^2 + K_{\ell 0})} \right) \approx \ell_{dc1}$$

$$B_\ell = \frac{\nu_{r2}^2 \nu_{r1}^2}{K_{\ell 0} (\nu_{r2}^2 - \nu_{r1}^2)} \left(\dot{\ell}_i \left(1 + \frac{K_{\ell 0}}{\nu_{r2}^2} \right) + r_i \right) \approx - \frac{\nu_{r1}^2}{K_{\ell 0}} \delta W_i$$

où nous avons fait les approximations : $\nu_{r1}^2 < K_{\ell 0} \ll \nu_{r2}^2$

Nous obtenons finalement pour les variables r , ℓ et δW (en utilisant les résultats approchés pour A_r , B_r , A_ℓ et B_ℓ) :

$$r \approx \delta W_i \cos \nu_{r1} \theta_0 + \frac{K_{\ell 0}}{\nu_{r1}} \ell_{dc1} \sin \nu_{r1} \theta_0 + r_{dc1} \cos \nu_{r2} \theta_0 + \frac{\dot{r}_i}{\nu_{r2}} \sin \nu_{r2} \theta_0 \quad [66]$$

$$\ell \approx \ell_{dc1} \cos \nu_{r1} \theta_0 - \frac{\nu_{r1}}{K_{\ell 0}} \delta W_i \sin \nu_{r1} \theta_0 + \frac{\dot{r}_i}{\nu_{r2}^2} \cos \nu_{r2} \theta_0 - \frac{r_{dc1}}{\nu_{r2}} \sin \nu_{r2} \theta_0 \quad [67]$$

$$\delta W \approx \delta W_i \cos \nu_{r1} \theta_0 + \frac{K_{\ell 0}}{\nu_{r1}} \ell_{dc1} \sin \nu_{r1} \theta_0 \quad [68]$$

← osc. lente → ← osc. rapide →

et pour les variables décorréllées :

$$r_{dc} = r - \delta W \approx r_{dci} \cos \nu_{r2} \theta_0 + \frac{\dot{r}_i}{\nu_{r1}} \sin \nu_{r2} \theta_0 \quad (\text{osc. rapide}) \quad [69]$$

$$\ell_{dc} = \ell - \frac{\dot{r}}{\nu_{r2}^2} \approx \ell_{dci} \cos \nu_{r1} \theta_0 - \frac{\nu_{r1}}{K_{\ell 0}} \delta W_i \sin \nu_{r1} \theta_0 \quad (\text{osc. lente}) \quad [70]$$

ou en posant :

$$C_1 = \sqrt{\delta W_i^2 + (K_{\ell 0} / \nu_{r1})^2 \ell_{dci}^2} \quad \text{tg} \alpha_1 = (K_{\ell 0} / \nu_{r1}) \ell_{dci} / \delta W_i$$

$$\text{et} \quad C_2 = \sqrt{(r_i - \delta W_i)^2 + (\dot{r}_i / \nu_{r2})^2} \quad \text{tg} \alpha_2 = (\dot{r}_i / \nu_{r2}) / (r_i - \delta W_i)$$

$$\begin{cases} \delta W = C_1 \cos(\nu_{r1} \theta_0 - \alpha_1) \\ \delta \varphi_{dc} = (h/R_0) \nu_{r1} C_1 / K_{\ell 0} \sin(\nu_{r1} \theta_0 - \alpha_1) \end{cases} \quad [71]$$

$$\begin{cases} r - \delta W = r_{dc} = C_2 \cos(\nu_{r2} \theta_0 - \alpha_2) \\ \delta \varphi - \delta \varphi_{dc} = (h/R_0) C_2 / \nu_{r2} \sin(\nu_{r2} \theta_0 - \alpha_2) \end{cases} \quad [72]$$

En conclusion sous les effets de la CE (figure 7) :

* La phase décorréllée et l'énergie ne restent plus constantes; on obtient une oscillation très lente autour de $\delta W = \delta \varphi = 0$ décrite avec la période $2\pi/\nu_{r1}$ (équations [71] et schéma figure 7 a)

* Ces oscillations lentes se retrouvent en r et $\delta \varphi$ modulées par l'oscillation bétatronique normale de période $2\pi/\nu_{r2}$, avec bien sûr la diminution attendue du nombre d'onde (équation [72] et schéma figure 7 b).

Tout se passe comme si nous avions à faire à une sorte d'oscillation synchrotronique modulée par l'oscillation bétatronique : en tout cas l'isochronisme n'est plus du tout assuré pour une particule quelconque puisque $\delta \varphi$ varie entre $\mp |\delta \varphi_{\max}|$ c'est-à-dire de part et d'autre de la phase de la particule centrale.

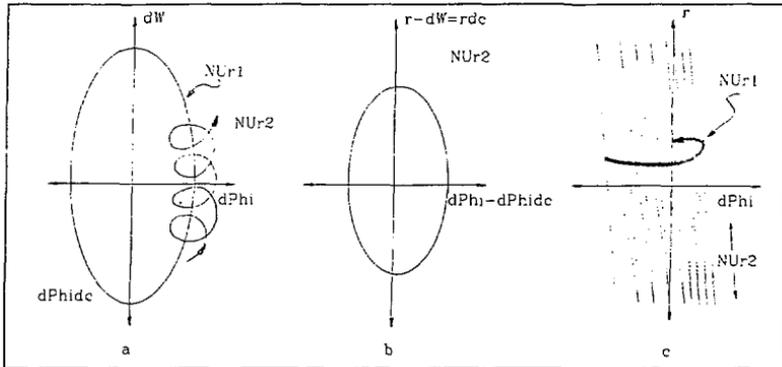


figure 7 $\left\{ \begin{array}{l} \text{a. ellipse } \delta W - \delta\varphi_{dc} \text{ et ellipses } r_{dc} - (\delta\varphi - \delta\varphi_{dc}) \\ \text{b. ellipse } r_{dc} - (\delta\varphi - \delta\varphi_{dc}) \\ \text{c. } \delta\varphi_{dc} = h/\nu_{r2}^2 r' + \delta\varphi \end{array} \right.$

Remarque:

Le mouvement lent peut être obtenu à partir des équations [27], [28] et [32] si nous moyennons ces expressions sur un nombre fini d'oscillations bêta-tron et si nous tenons compte du fait que les dérivées d'ordre n du mouvement lent sont négligeables devant les dérivées d'ordre $(n-1)$. Nous obtenons ainsi les équations du mouvement lent⁽⁵⁾:

$$\begin{array}{l} -\nu_{CE}^2 \dot{\ell} = K_{r0} r \\ \dot{r} = K_{\ell 0} \ell \end{array} \quad \left| \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \ddot{\ell} + K_{r0} K_{\ell 0} \ell / \nu_{CE}^2 = 0 \\ \ddot{r} + K_{r0} K_{\ell 0} r / \nu_{CE}^2 = 0 \end{array} \right.$$

d'où en première approximation la fréquence ν_{r1} donnée par [62a].

II.2.2 Etude du mouvement avec accélération ($R_0 \neq 0$):

II.2.2.1. Sans effet de CE ($\vec{K}=0$):

A partir de la définition du pas de spiralisation σ (équation [5]) nous déduisons (indice "i" pour les valeurs prises à l'injection) :

$$\begin{cases} R_0^2 = R_{0i}^2 (1 + (\sigma_i / \pi R_{0i}) \theta) & [73] \\ \sigma R_0 = \sigma_i R_{0i} = \text{cst} & [74] \\ R_0 \dot{R}_0 = \sigma_i R_{0i} / 2\pi = \text{cst} & [75] \end{cases}$$

Nous nous bornons à étudier le mouvement lent, moyennant les oscillations bêtaoniques classiques de fréquence rapide, ce qui revient à annuler les dérivées secondes; le système d'équations à résoudre s'écrit donc (équations [27], [28] et [32]):

$$(\nu_r^2 - 1)(r - \delta W) - \dot{\ell}_{dc} = -(\dot{R}_0 / R_0) \ell_{dc} \quad [76]$$

$$\dot{r} = -\dot{R}_0 / R_0 (r - n_z \ell_{dc}) \quad [77]$$

$$\dot{\ell}_{dc} + r - \delta W = \text{Cst} / R_0 \quad [32]$$

En éliminant $r - \delta W$, entre [32] et [76] nous avons:

$$(\nu_r^2 - 1) \text{Cst} / R_0 - \nu_r^2 \dot{\ell}_{dc} + \dot{R}_0 / R_0 \ell_{dc} = 0$$

soit en tenant compte de [75] et comme $d\ell_{dc}/d\theta_0 = (d\ell_{dc}/dR_0) \dot{R}_0$:

$$2\pi (\nu_r^2 - 1) \text{Cst} / \sigma_i R_{0i} - \nu_r^2 d\ell_{dc}/dR_0 + \ell_{dc}/R_0 = 0$$

dont la solution est: $\ell_{dc} = R_0 \delta \theta_{dci}$ [78]

La valeur de la constante figurant dans l'expression [32] est donc:

$$\text{Cst} = (\sigma_i / 2\pi) \ell_{dci} = \dot{R}_{0i} \ell_{dci} \quad [79]$$

et cette constante n'est plus nulle comme elle l'était en absence d'accélération, cas pour lequel $\dot{R}_{0i} = 0$.

L'équation [32] donne alors:

$$r - \delta W = r_{dc} = 0$$

c'est à dire que nous retrouvons bien l'hypothèse du départ: les oscillations bétatron ont été moyennées, elles apparaissent nulles et, pour le mouvement radial (hors oscillations bétatron) nous obtenons à partir de [77]:

$$d(R_0 r) = dR_0^2/2 n_e \delta \theta_{dc i}$$

$$\text{soit} \quad r = 1/2 n_e \delta \theta_{dc i} R_0 + \text{Cst}/R_0 \quad [80]$$

Lorsque $n_e = 0$, l'excursion radiale (due à la déviation d'énergie) décroît comme $1/R_0$ c'est-à-dire comme $1/\sqrt{W_0}$ ce qui est bien le résultat attendu.

II.2.2.2. Avec effet de CE ($\bar{K} \neq 0$):

Nous considérons comme dans l'étude sans accélération que les dimensions Δr , Δz et Δp du paquet restent constantes au cours du mouvement; alors si nous négligeons les variations de $g(\xi)$ (cf figure 8), les forces de CE diminuent comme $1/R_0$ (cf. annexe I.3). Les équations du mouvement lent s'écrivent:

$$(\nu_r^2 - 1)(r - \delta W) - \dot{\ell}_{dc} = K_{r0} r - \dot{R}_0/R_0 \ell_{dc} \quad [81]$$

$$\dot{r} = K_{z0} \ell_{dc} - \dot{R}_0/R_0 (r - n_e \ell_{dc}) \quad [82]$$

$$\dot{\ell}_{dc} + r - \delta W = \dot{R}_0 \ell_{dc i} / R_0 i \quad [83]$$

Après quelques calculs simples (cf annexe I.2) et en tenant compte du fait que $(\dot{R}_0/R_0)^2 + \ddot{R}_0/R_0 = 0$ et que $\dot{K}_x = -(\dot{R}_0/R_0) K_x$ ($x = r$ ou ℓ) nous obtenons:

$$\ddot{\ell}_{dc} + \frac{K_{r0} K_{z0}}{\nu_r^2} \ell_{dc} + \frac{1}{\nu_r^2} \frac{\dot{R}_0}{R_0} \left(K_{r0} n_e \ell_{dc} + (2\nu_r^2 - 1) \dot{\ell}_{dc} \right) = \frac{(\nu_r^2 - 1)}{\nu_r^2} \frac{\dot{R}_0^2}{R_0} \frac{\ell_{dc i}}{R_0 i} \quad [84]$$

En absence d'accélération nous retrouvons bien l'oscillation lente longitudinale qui correspond à la variable décorrélée.

En présence d'accélération nous pouvons, moyennant certaines approximations, résoudre [84] en utilisant l'approximation adiabatique.

En particulier, la solution de l'équation homogène, en nous bornant au cas où $n_z = 0$, est de la forme:

$$\ell_{dc} = A(\theta_0) \cos \left(\int_0^{\theta_0} \Omega(\theta) d\theta - \alpha \right)$$

qui reportée dans [84] ($\ddot{A} \approx 0$, $\dot{R}_0/R_0 \dot{\Omega} \approx 0$) donne:

$$\Omega(\theta_0) = \sqrt{K_{r0} K_{\ell 0} / v_r^2} \quad [85a] \quad A(\theta_0) = \frac{Cst}{R_0^{1-1/2v_r^2}} \left(K_{r0} K_{\ell 0} / v_r^2 \right)^{-1/4} \quad [85b]$$

Si nous considérons que $K_{r0} K_{\ell 0}$ varie comme $1/R_0^2$, alors l'amplitude varie comme $R_0^{-(v_r^2-1)/(2v_r^2)}$ et selon que $v_r^2 \gg 1$ l'amplitude du mouvement va décroître, croître ou rester approximativement constante si $v_r^2 \approx 1$.

Pour le mouvement radial (nous utilisons [82] avec $n_z = 0$):

$$d(R_0 r) = R_0 K_{\ell 0} \ell_{dc} \Rightarrow r = K_{\ell 0} \int_0^{\theta_0} \ell_{dc} d\theta$$

et la déviation d'énergie est donnée par [83].

Dans le cas particulier où $v_r^2 = 1$, les équations [84] et [85] ont une solution analytique (annexe I.2):

$$\ell_{dc} = A \cos \left\{ (R_0 - R_{0i}) / X - \alpha \right\}$$

$$r = A \left\{ \sqrt{K_{\ell 0i} / K_{r 0i}} \sin((R_0 - R_{0i}) / X - \alpha) + \sigma_i / (2\pi K_{r 0i} R_0) \cos((R_0 - R_{0i}) / X - \alpha) \right\}$$

avec
$$A = \sqrt{\ell_{dc i}^2 + \hat{\ell}_{dc i}^2 / (K_{r 0i} K_{\ell 0i})}; \quad \text{tg } \alpha = \sqrt{K_{r 0i} K_{\ell 0i}} \ell_{dc i} / \hat{\ell}_{dc i}$$

et
$$X = \sigma_i / \left(2\pi \sqrt{K_{r 0i} K_{\ell 0i}} \right) \quad [86]$$

L'amplitude de ℓ_{dc} est constante, quant à r , il apparait comme la somme d'un terme d'amplitude constante et d'un terme en quadrature dont l'amplitude décroît avec le rayon. La longueur d'onde de ces oscillations est constante.

III. ETUDE COMPARATIVE ENTRE LA THEORIE ET LA SIMULATION

III.1 CONDITIONS DE CETTE ETUDE:

Les résultats de l'étude théorique sont comparés à ceux issus du programme de simulation à trois dimensions NAJO (voir annexe).

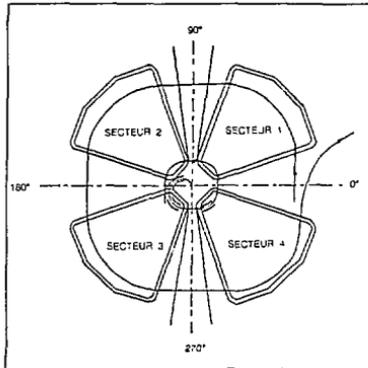
Nous avons considéré le cas du CSS1 de GANIL.

III.1.1. Caractéristiques de CSS1:

CSS1 est un cyclotron à 4 secteurs séparés de 52° (figure 8); en approximation hard-edge et pour $v/c \ll 1$ nous avons :

$$\begin{array}{lll} \nu_{r0} = 1.0757 & \nu_{z0} = 0.8749 & \\ \beta_{r\text{vallée}} / \bar{R}_0 = 0.6751 & \beta_{r\text{secteur}} / \bar{R}_0 = 1.3842 & \bar{\beta}_r / \bar{R}_0 \approx 0.98 \\ \beta_{z\text{vallée}} / \bar{R}_0 = 1.1698 & \beta_{z\text{secteur}} / \bar{R}_0 = 1.0419 & \bar{\beta}_z / \bar{R}_0 \approx 1.15 \\ R_{0\text{vallée}} / \bar{R}_0 = 0.9140 & R_{0\text{secteur}} / \bar{R}_0 = 1.0444 & \end{array}$$

CSS1 possède deux cavités accélératrices diamétralement opposées de 34° d'ouverture angulaire (deux intervalles d'accélération par cavité). Notons à ce propos que lors de la simulation, l'effet de l'ouverture angulaire des cavités⁽¹³⁾ sera automatiquement pris en compte alors que dans notre modèle il est évidemment absent. Toutefois, cet effet est faible pour un choix judicieux de l'angle d'ouverture des cavités et en particulier dans notre cas.



CSS1
figure 8

III.1.2. Caractéristiques du faisceau injecté:

Nous considérons un faisceau d' Ar^{+6} accéléré à $f_{HF} = 10$ MHz sur l'harmonique 5 et injecté à l'énergie :

$$W_0 = 0.5418 \text{ Mev/A (} v/c \approx 0.0341)$$

à laquelle correspond :

$$\bar{R}_0 = 0.8133 \text{ m} \quad R_{0\text{vallée}} = 0.7434 \text{ m}$$

Le pas de spiralisation à l'injection correspondant à une tension de 186 KV sur les cavités est :

$$\sigma_i \approx 67 \text{ mm} \quad \text{d'où : } (\sigma/2 \pi \bar{R}_0)_{inj} \approx 0.013 \ll 1$$

Les caractéristiques de la trajectoire de la particule centrale sont données sur la figure 9 .

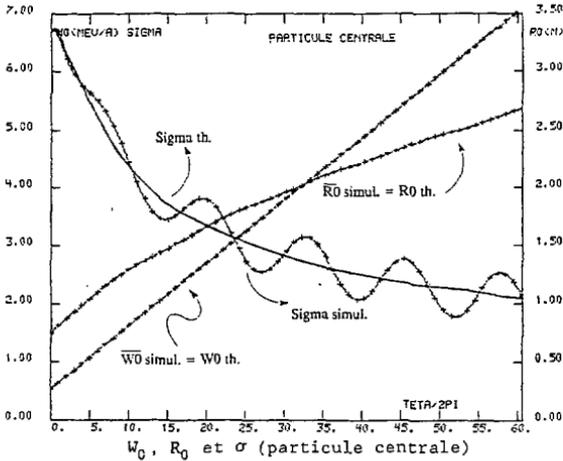


figure 9

Les faibles oscillations qui dans la simulation affectent le pas de spiralisation ne sont pas dues seulement à l'effet GABA⁽¹⁴⁾ ou à une erreur sur l'angle d'injection; elles sont présentes dès que $\bar{R}_0 \neq 0$ c'est à dire dès que le pas de spiralisation n'est pas constant : ce sont les oscillations cohérentes que nous avons mentionnées au chapitre I.1.2. et que dans ce cas nous avons atténuées dans la zone d'injection par un choix approprié de l'angle d'injection. Plus généralement, par un choix convenable des conditions d'injection il est possible d'annuler les oscillations de la trajectoire de référence au voisinage de n'importe quel rayon R_0 , mais il est impossible de l'annuler pour l'ensemble de rayons.

Le faisceau injecté est caractérisé par les émittances non corrélées suivantes :

$$\varepsilon_r \approx 45 \pi \text{ mm mrad. (émittance radiale monochromatique)}$$

$$\varepsilon_z \approx 33 \pi \text{ mm mrad.}$$

$$\Delta\phi = 6^\circ \quad \text{soit } \Delta\ell = 18.2 \text{ mm} \quad \Delta W/W = 7.5 \cdot 10^{-3}$$

Les conditions d'adaptation au centre d'une vallée donnent alors:

$$\Delta x \approx \sqrt{\beta_{x \text{ vallée}} \frac{\epsilon_x}{\pi}} \quad \text{soit: } \begin{cases} \Delta r \approx 5.0 \text{ mm} & \Delta r' = 9 \text{ mrad} \\ \Delta z \approx 5.7 \text{ mm} & \Delta z' = 5.85 \text{ mrad} \end{cases}$$

III.1.3 Cas traités:

Nous avons comparé théorie et simulation pour des faisceaux de 0, 0.24, 0.48, 0.96 et 1.92 mA d'Ar⁶⁺, c'est-à-dire pour 0, 2.5 10¹⁴, 5. 10¹⁴, 10¹⁵ et 2. 10¹⁵ ions/s.

Pour les dimensions du faisceau données plus haut et pour une intensité de 10¹⁴ ions/s (0.096 mA) les forces de CE sont caractérisées par:

$$K_{z0}(0.096 \text{ mA}) = K_{r0}(0.096 \text{ mA}) = 0.018 \quad K_{\ell 0}(0.096 \text{ mA}) = 0.004$$

Nous pouvons ainsi apprécier les approximations faites pour obtenir les formules [66] à [70] (nous avons considéré $K_{\ell 0} \ll v_{r2}^2$ et $K_{r0} \ll 1$), et estimer jusqu'à quelle valeur de l'intensité elles restent valables. Par ailleurs, on peut aussi comparer ces valeurs à celles de $\sigma/2\pi R_0$, c'est-à-dire aux forces accélératrices.

Le paquet d'ions est simulé au moyen de 100 particules et nous avons choisi de représenter le comportement de celle dont les conditions initiales sont:

$$\begin{array}{ll} r_i = 1.20 \text{ mm} & r'_i = -3.63 \text{ mrad} \\ \delta w_i = 0.44 \text{ mm} & r_{dci} = 0.76 \text{ mm} \\ \delta \varphi_i = -0^\circ.56 & \delta \varphi_{dci} = -1^\circ.52 \text{ soit } \ell_i = 1.60 \text{ mm} \quad \ell_{dci} = 4.30 \text{ mm} \\ z_i = -4.74 \text{ mm} & z'_i = 1.10 \text{ mrad} \end{array}$$

Cette particule est bien située à l'intérieur du paquet dans l'espace(r , $\delta\varphi$); elle est par contre près du bord de la distribution en z de façon à bien tester le découplage entre le mouvement dans le plan médian et le mouvement axial.

Les courbes présentées dans les chapitres III.2 et III.3 ont été échantillonnées au centre des vallées une ou quatre fois par tour.

III.2 LE MOUVEMENT AXIAL:

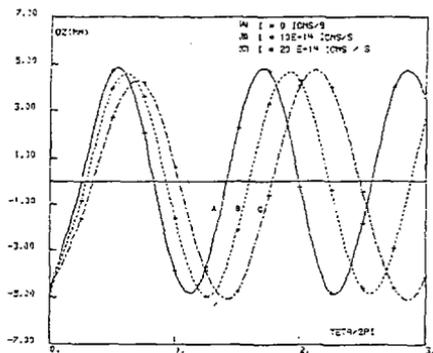
III.2.1 En absence d'accélération:

La particule décrit le mouvement sinusoïdal attendu autour de $z = 0$ (figures 10 a et 10 b) et le nombre d'onde ν_z diminue avec l'intensité conformément à la théorie (tableau 1 et figure 11).

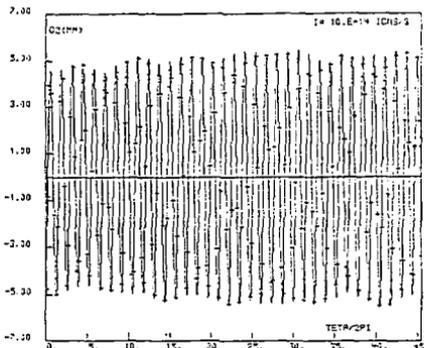
N (10^{14} ions/s)	0	2.5	5.0	10.0	20.0
ν_z (simulation)	0.862	0.832	0.810	0.770	0.700
ν_z (théorie)	0.875	0.836	0.809	0.751	0.622

tableau 1

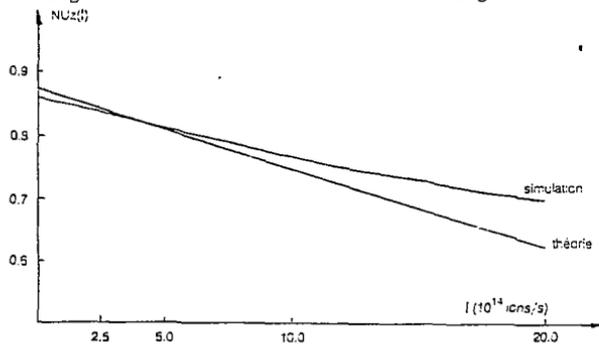
Pour ν_{z0} ($I=0$) nous avons pris la valeur théorique prévue pour un champ "hard-edge" dans les secteurs, et pour $I \neq 0$ les valeurs calculées à partir de [42]. Les valeurs issues de la simulation sont déterminées avec environ 1% d'erreur.



osc. axiales : 3 tours non acc.
figure 10 a

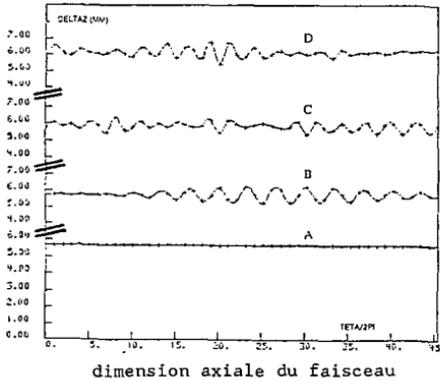


osc. axiales : 45 tours non acc.
figure 10 b



variations de ν_z avec I
figure 11

La différence entre $\nu_{z\text{sim.}}$ (simulation) et $\nu_{z\text{th.}}$ (théorie) croît avec l'intensité. Ceci n'est pas dû aux variations de l'amplitude Δz du faisceau (fig.12) qui reste bien constante conformément à la théorie (les faibles oscillations de Δz peuvent être le résultat d'une désadaptation du faisceau avec l'intensité ou dues à un faible couplage entre les plans axial et médian). Cette différence provient du grossissement du faisceau dans le plan médian dû à l'augmentation de ΔW en présence de CE et donc de Δr (voir figure 21 a et 21 b). La force de CE axiale K_z décroît et $\delta\nu_z(I)$ diminue par rapport à la théorie dans laquelle les dimensions du faisceau sont supposées inchangées.



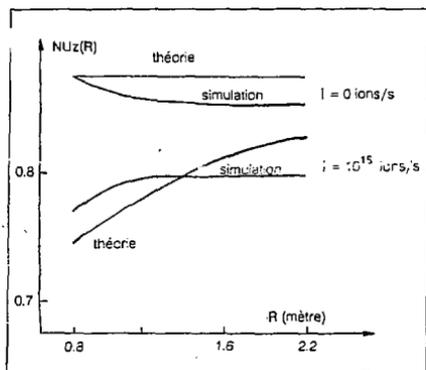
- A- $\dot{N} = 0$ ions/s
- B- $\dot{N} = 2.5 \cdot 10^{14}$ ions/s
- C- $\dot{N} = 10^{15}$ ions/s
- D- $\dot{N} = 2 \cdot 10^{15}$ ions/s

figure 12

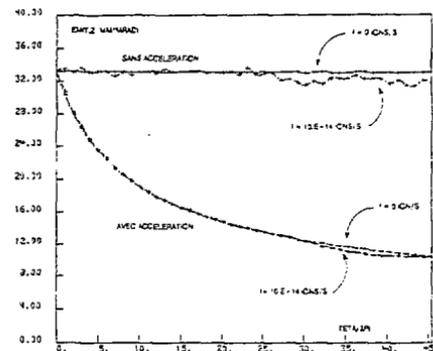
III.2.2 Avec accélération:

Pour $I = 0$ et dans le cadre de la simulation, le champ magnétique et la force de rappel axiale varient avec l'énergie des ions; notre théorie, non relativiste ne prévoit pas de telles variations ($\nu_{z0} = \text{const}$). Pour une intensité donnée, la force de CE va diminuer théoriquement comme $1/R_0$ avec Δr , Δz et $\Delta\varphi$ constants (éq. [37b]) entraînant l'augmentation de ν_z avec le rayon (figure 13): $\nu_z \rightarrow \nu_{z0}$.

La simulation montre par contre que ν_z tend vers une limite inférieure à ν_{z0} ce qui signifie que les forces de CE tendent elles-mêmes vers une limite qui provient, comme nous le verrons lors de l'étude du plan médian, du fait que Δr et $\Delta\varphi$ tendent eux-mêmes vers une limite (faisceau rond). En absence de CE le faisceau est bien adapté et sa dimension Δz ne varie pas; l'introduction de la CE ne perturbe pratiquement pas cette situation. Pour le faisceau accéléré (avec ou sans CE) l'émittance ϵ_z diminue avec le rayon conformément à la théorie puisque Δz diminue lui-même comme $1/R_0$ (figure 14).



variations de ν_z avec le rayon
figure 13



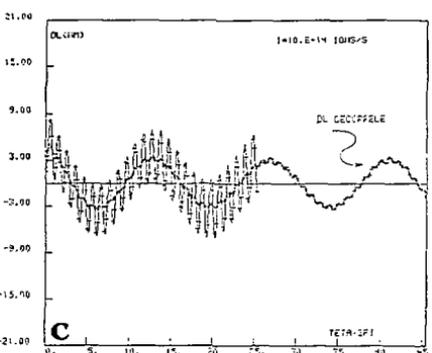
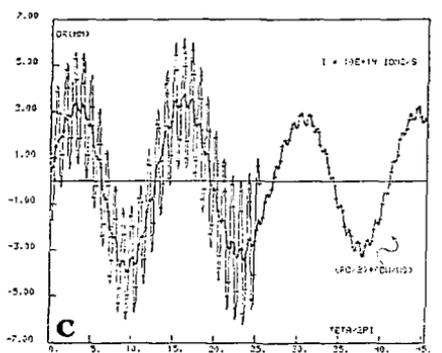
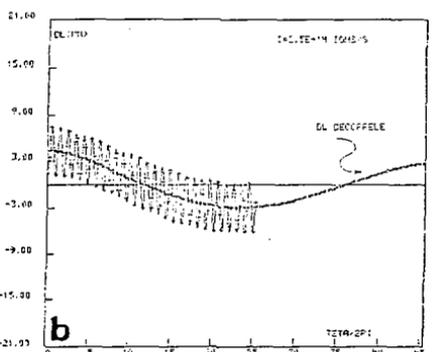
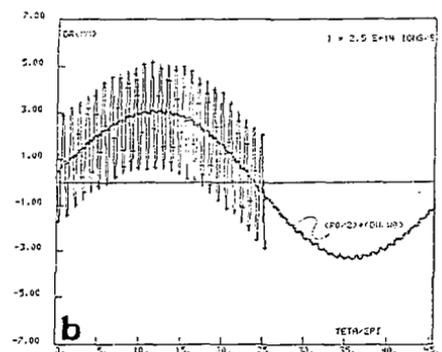
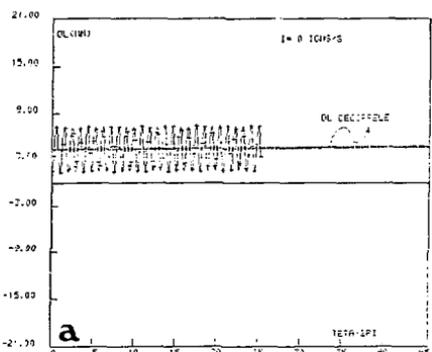
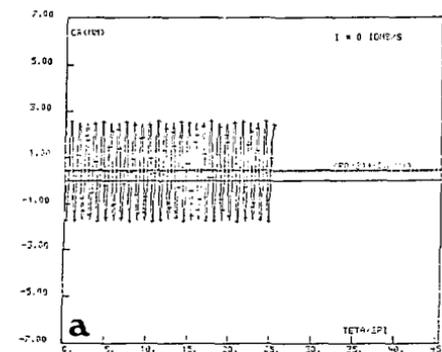
variations de ϵ_z avec le nb.de tours
figure 14

En conclusion la théorie et la simulation coïncident de façon très satisfaisante dans le cas du mouvement axial. Le couplage des mouvements axial et médian ne se manifeste qu'à travers les variations des effets produits par la CE entraînées par les variations des dimensions Δr et $\Delta \varphi$ du faisceau dans le plan médian. Ce couplage reste cependant faible et la dimension ainsi que l'émittance axiales du faisceau ne dépendent pratiquement pas de l'intensité; seul le nombre d'onde est changé (il diminue).

III.3 LE MOUVEMENT DANS LE PLAN MEDIAN:

III.3.1 En absence d'accélération:

Nous avons représenté les oscillations radiales (figure 15) et les oscillations longitudinales (figure 16) pour $0, 2.5 \cdot 10^{14}$ et 10^{15} ions/s. En présence de CE l'oscillation rapide classique de période $2\pi/\nu_{r2}$ module l'oscillation lente de période $2\pi/\nu_{r1}$. Cette oscillation lente suit les variations de la déviation d'énergie dans le cas des oscillations radiales, et correspond à la variable décorrélée (soit $\delta\varphi_{dc}$ ou ℓ_{dc}) dans le cas des oscillations longitudinales. Les expressions [68] et [70] décrivent ces oscillations lentes; cependant, à cause des approximations utilisées pour les obtenir, elles ne donnent pas les oscillations de très faible amplitude qui affectent la déviation d'énergie et la phase décorrélée et qui deviennent de plus en plus visibles quand nous augmentons l'intensité (voir eq. [64] et [65]).



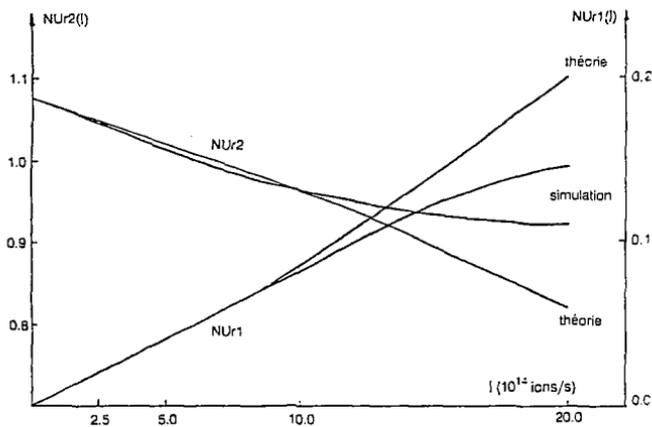
figures 15 a b c (osc.radiales)

figures 16 a b c (osc.longitud.)

Les valeurs théoriques des nombres d'onde (éq. [61] et [62]) et celles déterminées à partir de la simulation (à environ 1% près) sont resumées dans le tableau 2 et sur la figure 15. Théoriquement $\delta\nu_{r2}(I) = (\nu_{r0} - \nu_{r2}(I))$ et ν_{r1} sont surestimés. Dans la théorie nous considérons un paquet dont les dimensions restent constantes contrairement à ce qui se passe dans la simulation, où le grossissement du paquet dans le plan médian entraîne la diminution des effets créés par la CE dès les premiers tours.

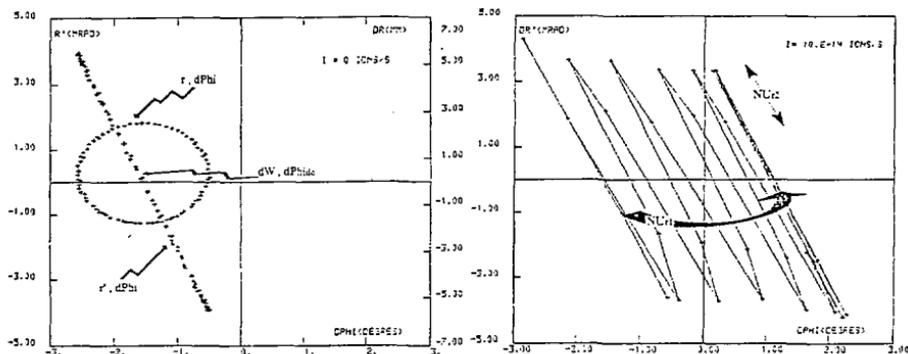
I 10^{14} ions/s	0	2.5	5.0	10.0	20.0	
ν_{r1}	simulation	-	0.0197	0.0397	0.0818	0.145
	théorie	-	0.0201	0.0412	0.0873	0.205
ν_{r2}	simulation	1.073	1.044	1.011	0.959	0.921
	théorie	1.076	1.047	1.020	0.962	0.821

tableau 2



variations de ν_{r1} et ν_{r2} avec l'intensité
figure 17

Nous illustrons la corrélation entre r' et $\delta\varphi$ (éq.[51]) en absence de CE sur la figure 18 a ; sur cette même figure nous avons représenté l'ellipse décrite dans le plan $r/\delta\varphi$ (ellipse centrée en δW et $\delta\varphi_{dc}$). Sur la figure 18 b et pour 10^{15} ions/s, nous illustrons la relation [70] donnant $r' = f(\delta\varphi - \delta\varphi_{dc})$. Cette fois $\delta\varphi_{dc}$ ne demeure pas constante; d'où l'obtention d'un segment de droite décrit avec la période $2\pi/\nu_{r2}$ comme sur la figure 18a, mais qui se déplace maintenant dans le sens de variation de $\delta\varphi_{dc}$ avec la période $2\pi/\nu_{r1}$.



corrélation $r' - \delta\varphi$ et ellipse $r/\delta\varphi$
figure 18 a

$r' = \nu_{r2}^2/h(\delta\varphi_{dc} - \delta\varphi)$: 10^{15} ions/s
figure 18 b

En présence de CE les variables δW et $\delta\ell_{dc}$ ne demeurent plus constantes : elles décrivent une ellipse avec la période $2\pi/\nu_{r1}$ centrée en $(0, 0)$ conformément à la théorie (éq.[71] figures 19 a et 19 b). Théoriquement nous n'avons pas tenu compte de la variation des dimensions du faisceau qui se traduit par une variation dans l'amplitude des oscillations de $\delta\ell_{dc}$ et δW sensible dès les premiers tours.

Sur cette ellipse se trouvent les centres des ellipses $r_{dc}/(\delta\ell - \delta\ell_{dc})$ qui compte tenu de l'équation [70] sont aussi les ellipses $r_{dc}/(-h/\nu_{r2}^2 r)$ (figures 20 a et 20 b).

Les 'ellipses' des figures 19 et 20 sont décrites à une vitesse proportionnelle à la fréquence : ν_{r1} pour les figures 19 a et b, ν_{r2} pour les figures 20 a et b. Nous remarquons bien l'augmentation de ν_{r1} et la diminution de ν_{r2} avec l'intensité. Tel que nous l'avons prévu théoriquement ν_{r1} est, en première approximation, proportionnel à l'intensité.

$$\delta \ell_{dc} / \delta W$$

$$2.5 \cdot 10^{14} \text{ ions/s}$$

$$(\delta \ell - \delta \ell_{dc}) / r_{dc}$$

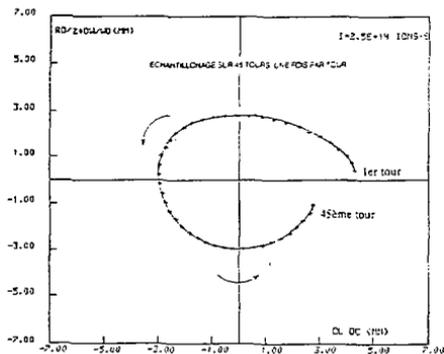


figure 19 a

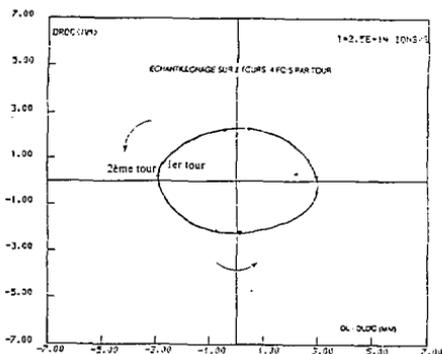


figure 20 a

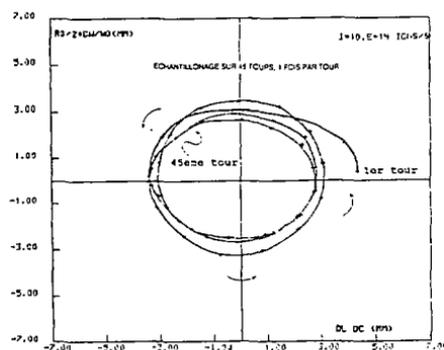
$$10^{15} \text{ ions/s}$$


figure 19 b

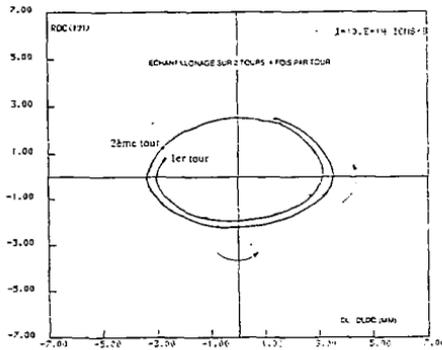
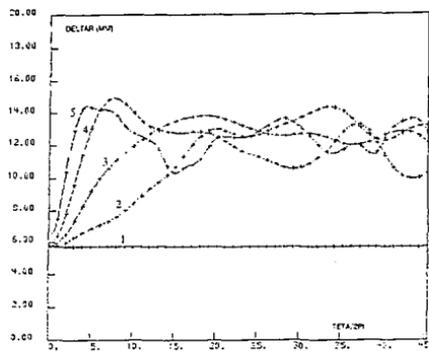
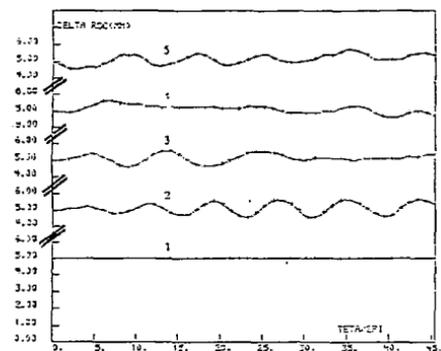
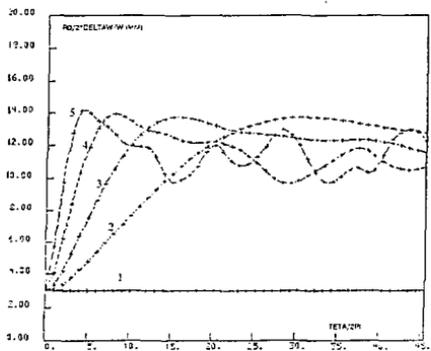
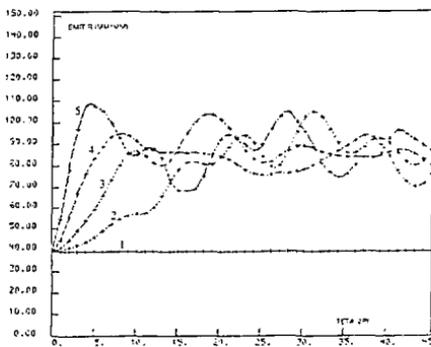
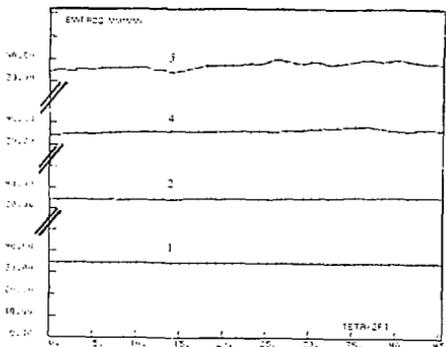


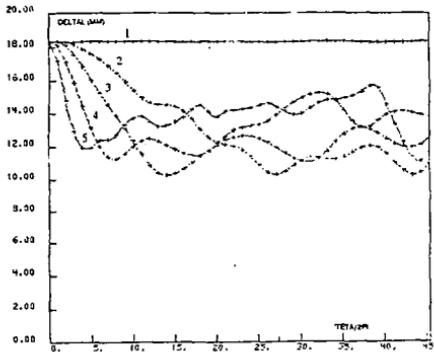
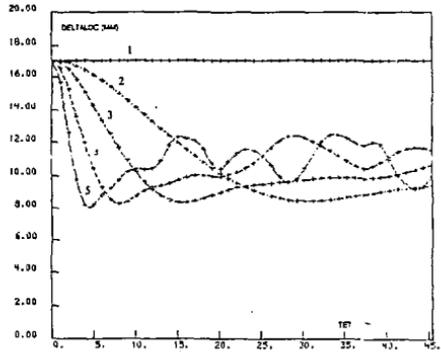
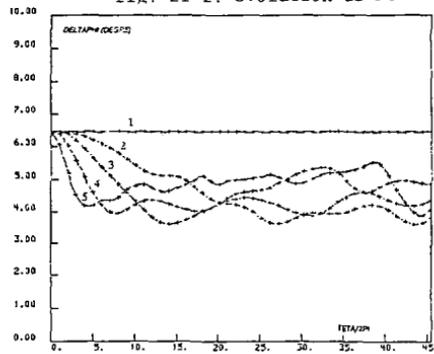
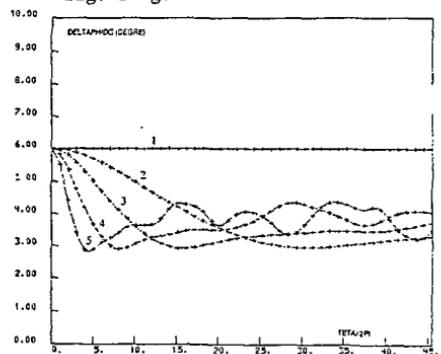
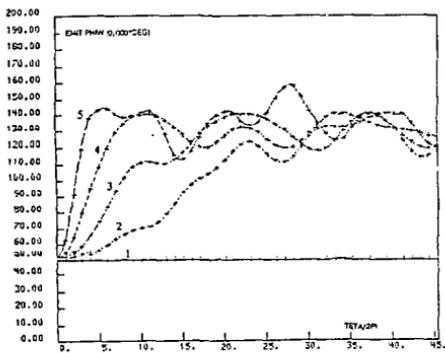
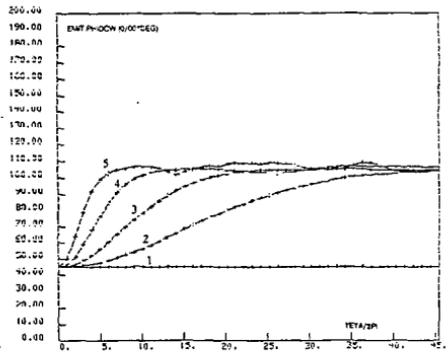
figure 20 b

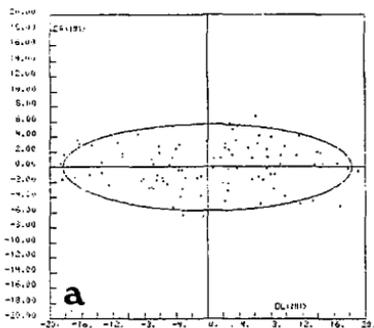
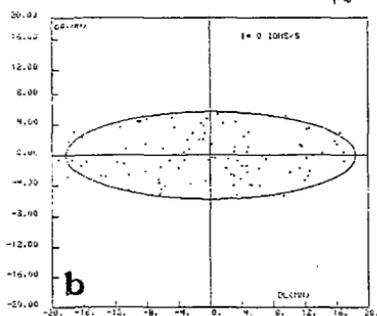
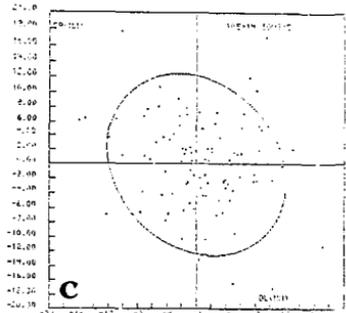
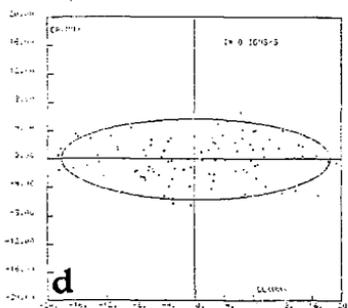
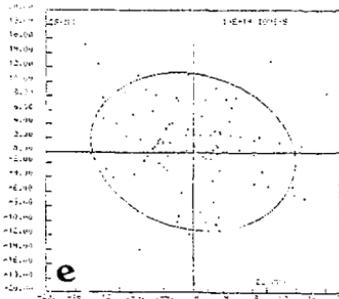
Les dimensions du faisceau en fonction du nombre de tours sont représentées sur les figures 21, les projections dans le plan médian sont données sur les figures 22 pour quelques cas (injection, 21^{ème} et 41^{ème} tours).

fig. 21 a: évolution de Δr fig. 21 b: évolution de Δr_{dc} fig 21 c: évolution de $Ro/2 * \Delta W/W_0$

- 1- $\dot{N} = 0$ ions/s
- 2- $\dot{N} = 2.5 \cdot 10^{14}$ ions/s
- 3- $\dot{N} = 5 \cdot 10^{14}$ ions/s
- 4- $\dot{N} = 10^{15}$ ions/s
- 5- $\dot{N} = 2 \cdot 10^{15}$ ions/s

fig. 21 d: évolution de ϵ_r fig. 21 e: évolution de $\epsilon_{r_{dc}}$

fig. 21 f: évolution de Δl fig. 21 g: évolution de Δl_{dc} fig. 21 h: évolution de $\Delta \phi$ fig. 21 i: évolution de $\Delta \phi_{dc}$ fig. 21 j: évolution de ϵ_{PW} fig. 21 k: évolution de $\epsilon_{PW_{dc}}$

Emittance $\epsilon_{r,e}$ à l'injection (105 mm^2)21^{ème} tour $\epsilon_{r,e} = 105 \text{ mm}^2$ (0 ions/s) $\epsilon_{r,e} = 150 \text{ mm}^2$ (10^{15} ions/s)41^{ème} tour $\epsilon_{r,e} = 105 \text{ mm}^2$ (0 ions/s) $\epsilon_{r,e} = 156 \text{ mm}^2$ (10^{15} ions/s)

figures 22 a b c d e

En absence de CE tout est parfait: le faisceau est stationnaire s'il est bien adapté et les émittances sont constantes (courbes 1 des figures 21 et figures 22 b et d).

En présence de CE chaque particule effectue des oscillations lentes en δW et ℓ_{dc} ; la sommation sur toutes les particules à partir des équations [68] et [70] conduit aux dimensions $\Delta \ell_{dc}$ et ΔW , soit en tenant compte du fait que $\sum S W_i \ell_{dc i} = 0$:

$$\Delta W^2 = \nu_{CE}^2 K_{\ell 0} / K_{r0} \Delta \ell_{dc}^2 + (\Delta W_i^2 - \nu_{CE}^2 K_{\ell 0} / K_{r0} \Delta \ell_{dc}^2) \cos^2 \nu_{r1} \theta_0$$

$$\Delta \ell_{dc}^2 = K_{r0} / (\nu_{CE}^2 K_{\ell 0}) \Delta W_i^2 + (\Delta \ell_{dc}^2 - K_{r0} / (\nu_{CE}^2 K_{\ell 0}) \Delta W_i^2) \cos^2 \nu_{r1} \theta_0$$

Ces expressions correspondent aux dimensions du faisceau dans le cas hypothétique que nous traitons: forces de CE linéaires à gradient constant.

Or, sur les figures issues de la simulation nous observons une montée pour Δr et ΔW et une décroissance pour $\Delta \varphi$ et $\Delta \ell$. Les dimensions atteignent, quel que soit l'intensité, une valeur limite commune après une demie période lente (π / ν_{r1}): le faisceau tend à devenir rond dans le plan médian, ce que n'explique pas notre théorie. A partir de cette constatation nous avons injecté un faisceau rond dans le plan médian (pour ce faisceau $K_{r0} = K_{\ell 0}$): il reste stationnaire comme nous le montrons sur les figures 23 a, b et c et d. Ce résultat est conforme à nos formules: avec $K_{r0} = K_{\ell 0}$, le faisceau, qui est rond dans le plan médian, reste bien adapté.

Les figures 23 sont à comparer au figures 12 c, 21 a, 21 c et 21 f pour une intensité de 10^{15} ions/s, nous avons gardé, évidemment, la même densité de particules dans le paquet.

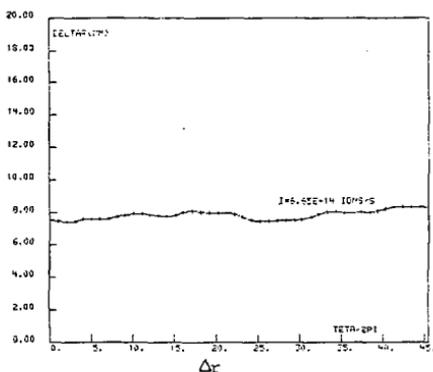


figure 23 a

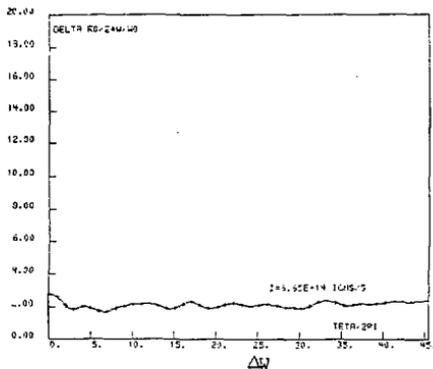
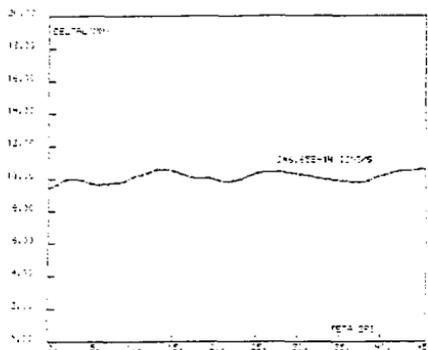
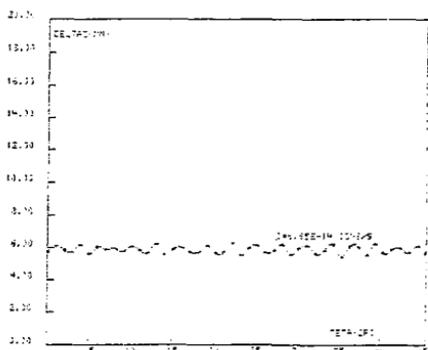


figure 23 b



Δl
figure 23 c



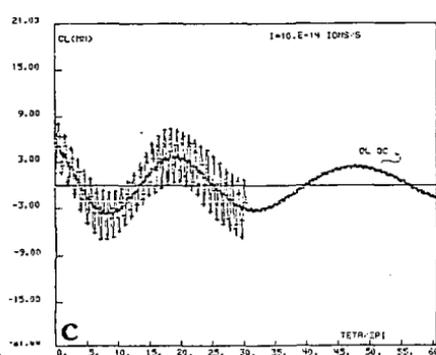
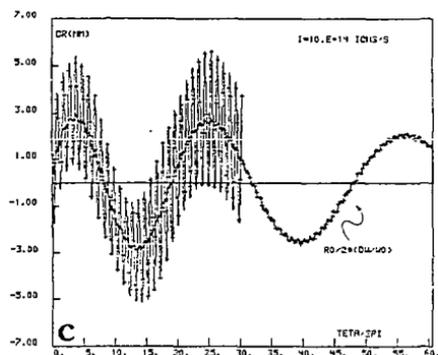
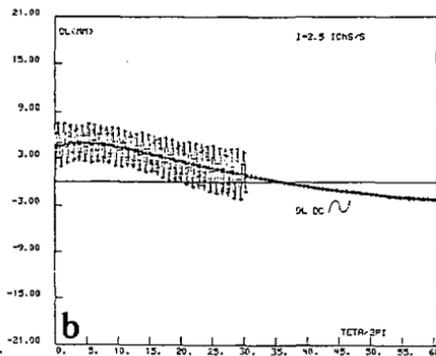
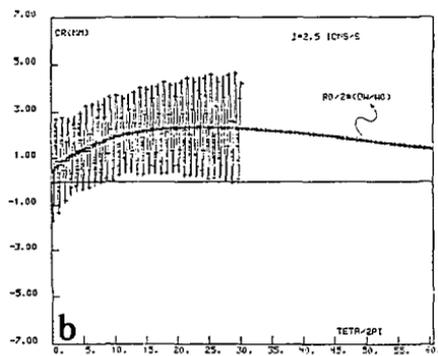
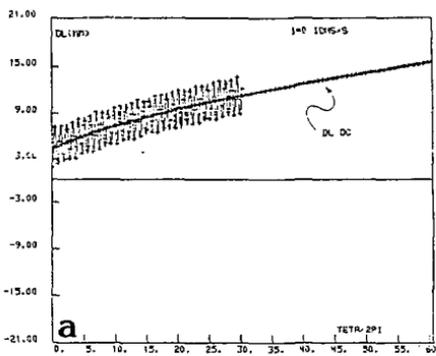
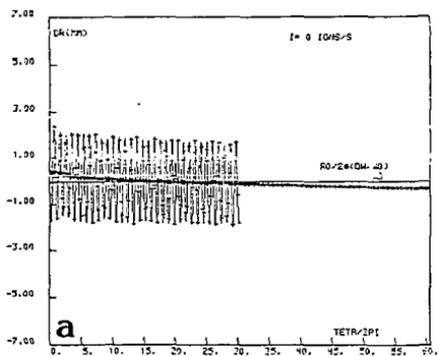
Δz
figure 23 d

III.3.2. Avec accélération:

Nous avons représenté les oscillations radiales (figure 24) et les oscillations longitudinales (figure 25) pour 0 , $2.5 \cdot 10^{14}$ ions/s et 10^{15} ions/s. En présence de CE l'oscillation rapide classique de période $2\pi/\nu_{r2}$ module l'oscillation lente de période $2\pi/\nu_r$, mais cette fois le nombre d'onde est fonction de l'intensité et du rayon. Cette oscillation lente suit comme dans le cas précédent (sans accélération) les variations de la déviation en énergie (multipliée par $R_0/2$) dans le cas des oscillations radiales et correspond à la variable décorrélée (soit $\delta\varphi_{dc}$ ou ℓ_{dc}) dans le cas des oscillations longitudinales.

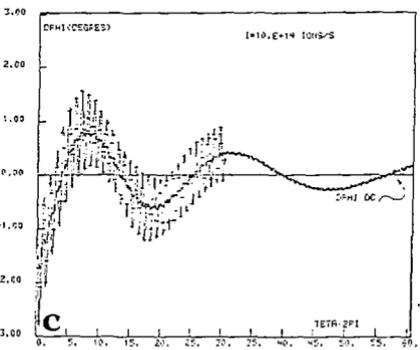
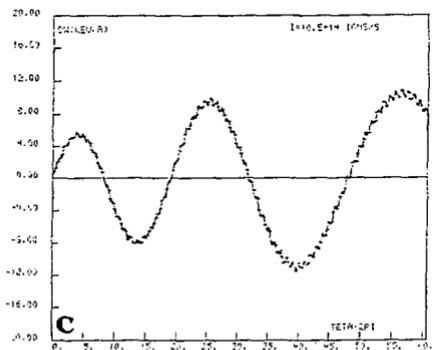
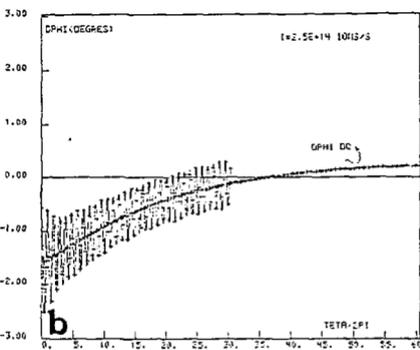
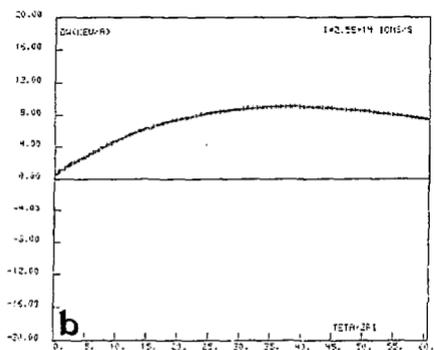
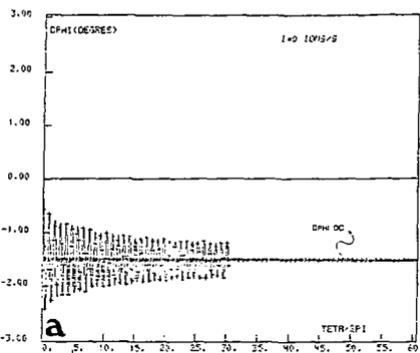
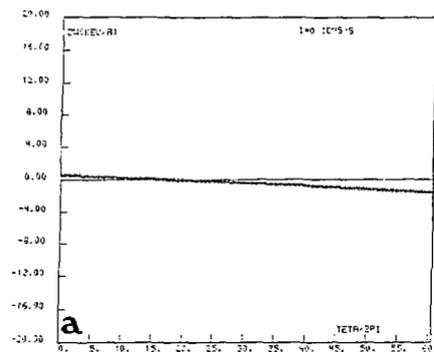
En absence de CE la variable décorrélée longitudinale ℓ_{dc} croît comme le rayon, tandis que la déviation en énergie décroît plus vite que dans notre prévision théorique : nous observons en fait l'influence des termes du deuxième ordre (accélération sur une sinusoïde).

Nous avons aussi représenté les oscillations de phase (figures 27), et les oscillations de la déviation en énergie (figures 26). Elles suivent les lois attendues : décroissance pour $\delta\varphi_{dc}$ comme $\delta\ell_{dc}/R_0$, croissance pour la dispersion en énergie comme $R_0\delta W$.



figures 24 a b c (osc.radiales)

figures 25 a b c (osc.longitud.)



figures 26 a b c (osc. déviation)

figures 27 a b c (osc. de phase)

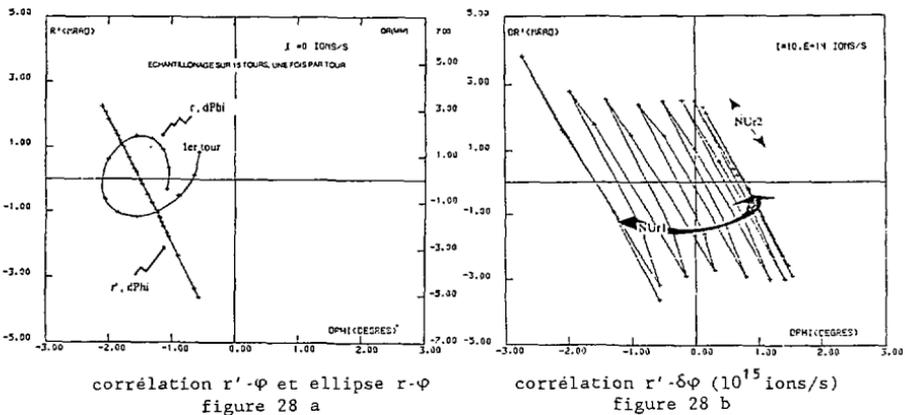
Nous avons, lors de la simulation, mesuré les périodes des oscillations lentes en fonction du rayon; si nous faisons l'approximation $\nu_r^2 \approx 1$, nous sommes en mesure de donner les valeurs théoriques de la longueur d'onde de l'oscillation lente et nous pouvons les comparer aux valeurs issues de la simulation (tableau 3).

N (10^{14} ions/s)	3.5	5.0	7.5	10.	20.
simulation	0.023	0.032	0.053	0.074	0.13
$2\pi/\lambda$ (cm^{-1}) théorie	0.026	0.038	0.057	0.076	0.15

tableau 3

Nous avons posé (cf. ch II.2.2.2, éq. [86]): $2\pi\lambda = \lambda = \sigma_i / \sqrt{K_{r0i} K_{z0i}}$

Nous illustrons la corrélation $r'-\varphi$ et l'ellipse décrite par les variables r/φ en absence de CE (figure 28 a) centrée sur δW et $\delta\varphi_{dc}$. Sur la figure 28 b et pour 10^{15} ions/s, nous illustrons la relation qui subsiste entre r' et $\delta\varphi$: comme dans le cas précédent $\delta\varphi_{dc}$ se déplace sur l'axe avec la période lente, les segments de droite sont décrits avec la période rapide, mais de plus r' décroît comme le rayon.



Les variables d'corrélées décrivent des ellipses mais beaucoup plus lentement qu'en absence d'accélération: la fréquence lente diminue avec le rayon (Figures 29 a et b). Nous retrouvons les ellipses $r_{dc}/(\delta\ell - \delta\ell_{dc})$ sur les figures 30 a et 30 b.

Les 'ellipses' des figures 29 et 30 sont décrites à une vitesse proportionnelle à la fréquence : ν_{r1} pour les figures 29 a et b et ν_{r2} pour les figures 30 a et b. Nous remarquons bien l'augmentation de ν_{r1} et la diminution de ν_{r2} avec l'intensité.

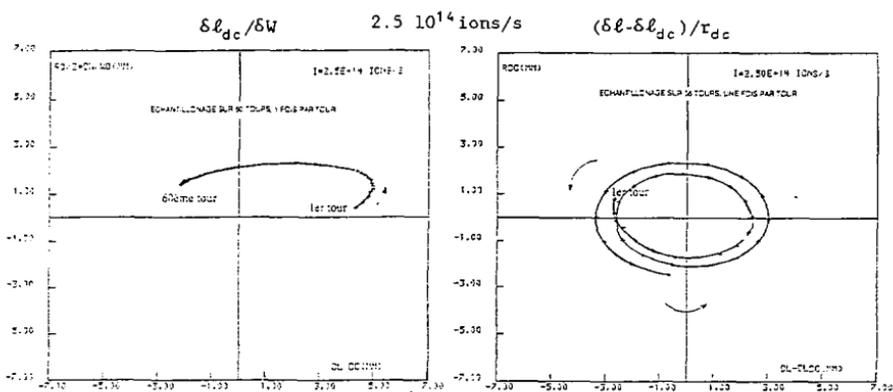


figure 29 a

figure 29 b

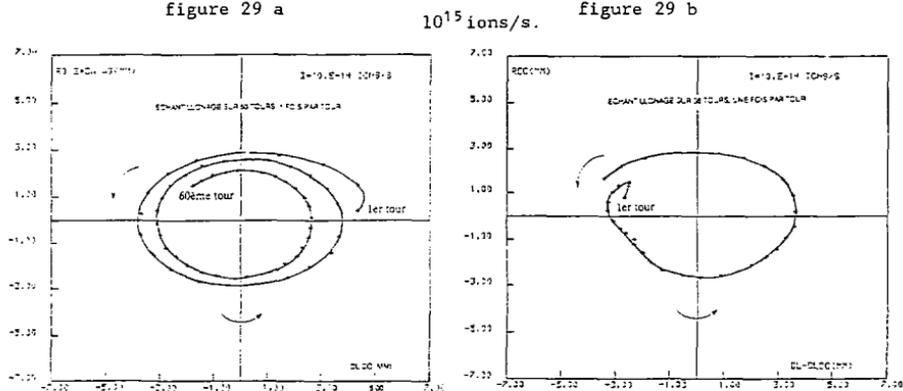
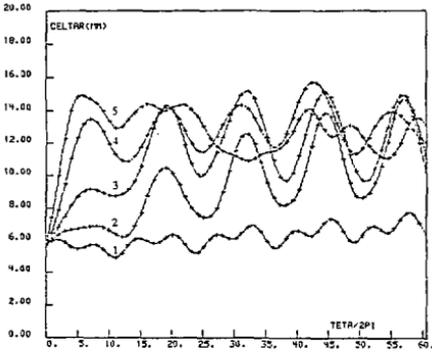
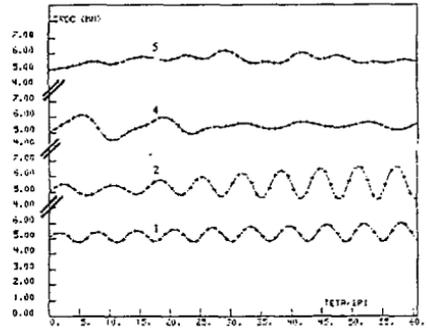
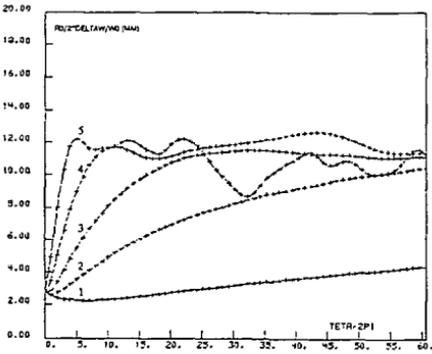


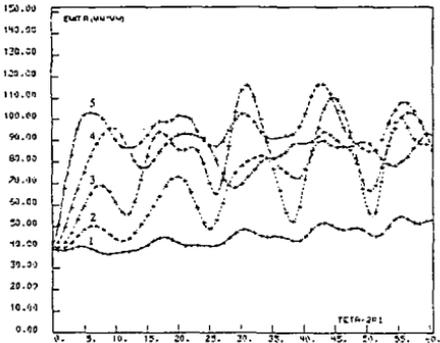
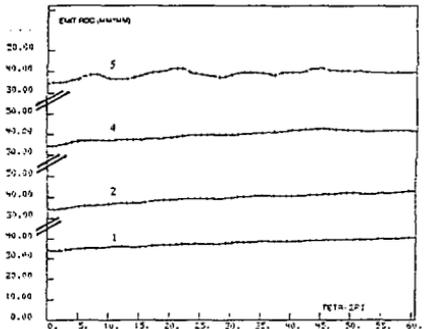
figure 30 a

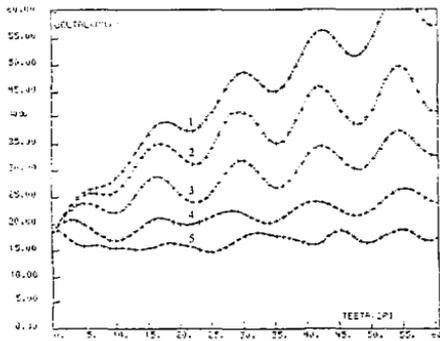
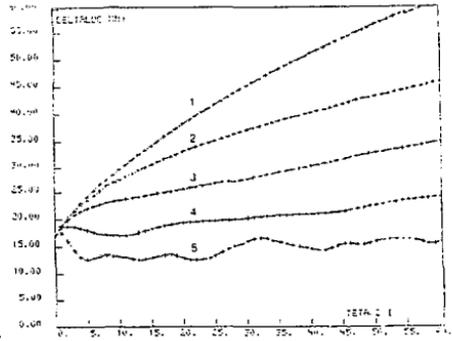
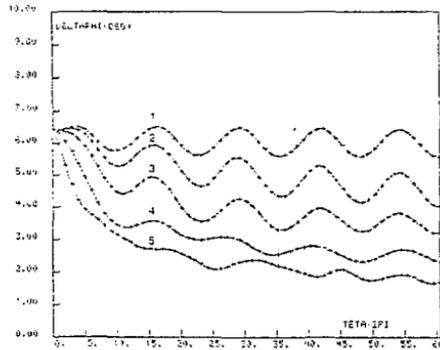
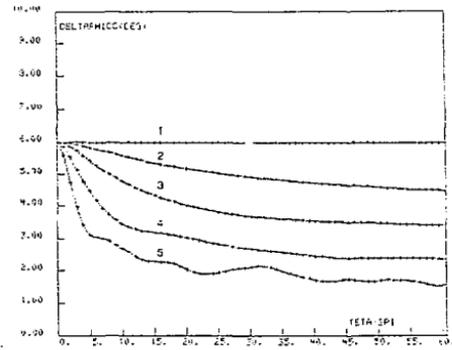
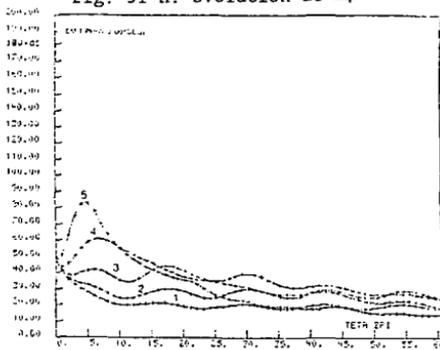
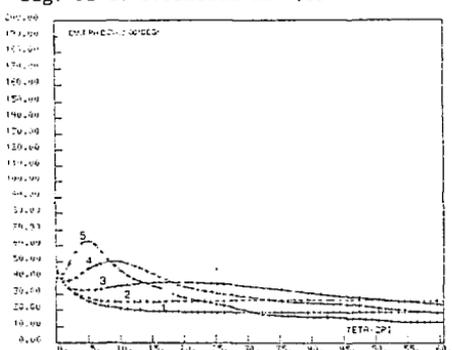
figure 30 b

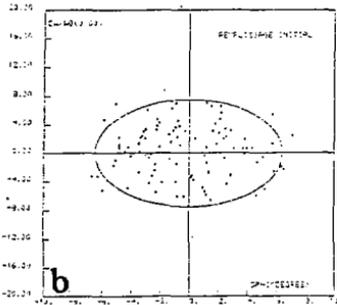
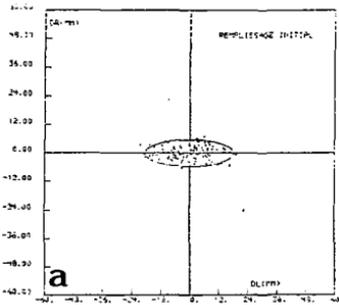
Les dimensions du faisceau en fonction du nombre de tours sont représentées sur les figures 31, les projections dans le plan médian sont données sur les figures 32 (injection, 61^{ème} tour) et 33 (5^{ème}, 10^{ème}, 15^{ème} et 20^{ème} tours).

fig. 31 a: évolution de Δr fig. 31 b: évolution de Δr_{dc} fig. 31 c: évolution de $R_0/2 \cdot \Delta W/W_0$

- 1- $\dot{N} = 0$ ions/s
- 2- $\dot{N} = 2.5 \cdot 10^{14}$ ions/s
- 3- $\dot{N} = 5 \cdot 10^{14}$ ions/s
- 4- $\dot{N} = 10^{15}$ ions/s
- 5- $\dot{N} = 2 \cdot 10^{15}$ ions/s

fig. 31 d: évolution de ϵ_{rr} fig. 31 e: évolution de $\epsilon_{rr_{dc}}$

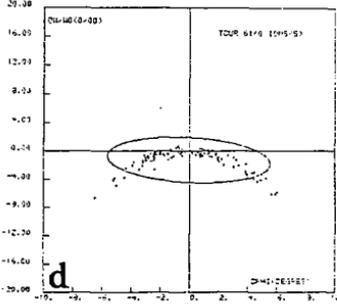
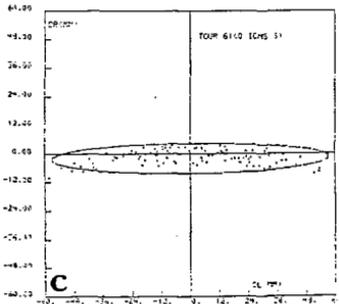
fig. 31 f: évolution de $\Delta \ell$ fig. 31 g: évolution de $\Delta \ell c$ fig. 31 h: évolution de $\Delta \varphi$ fig. 31 i: évolution de $\Delta \varphi c$ fig. 31 j: évolution de $\epsilon \varphi w$ fig 31 k: évolution de $\epsilon \varphi dcw$



Remplissage initial

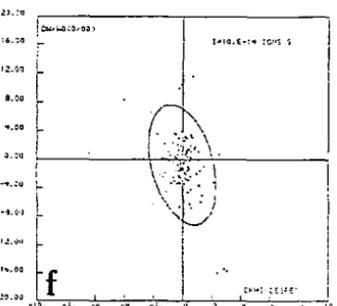
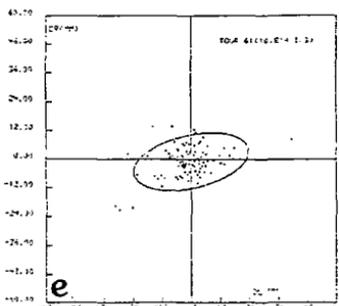
$$\epsilon_{r\ell} = 105 \text{ mm}^2\text{mm}$$

$$\epsilon_{w\varphi} = 48.4 \text{ 0/00}^\circ$$

61^{ème} tour (0 ions/s)

$$\epsilon_{r\ell} = 366.6 \text{ mm}^2\text{mm}$$

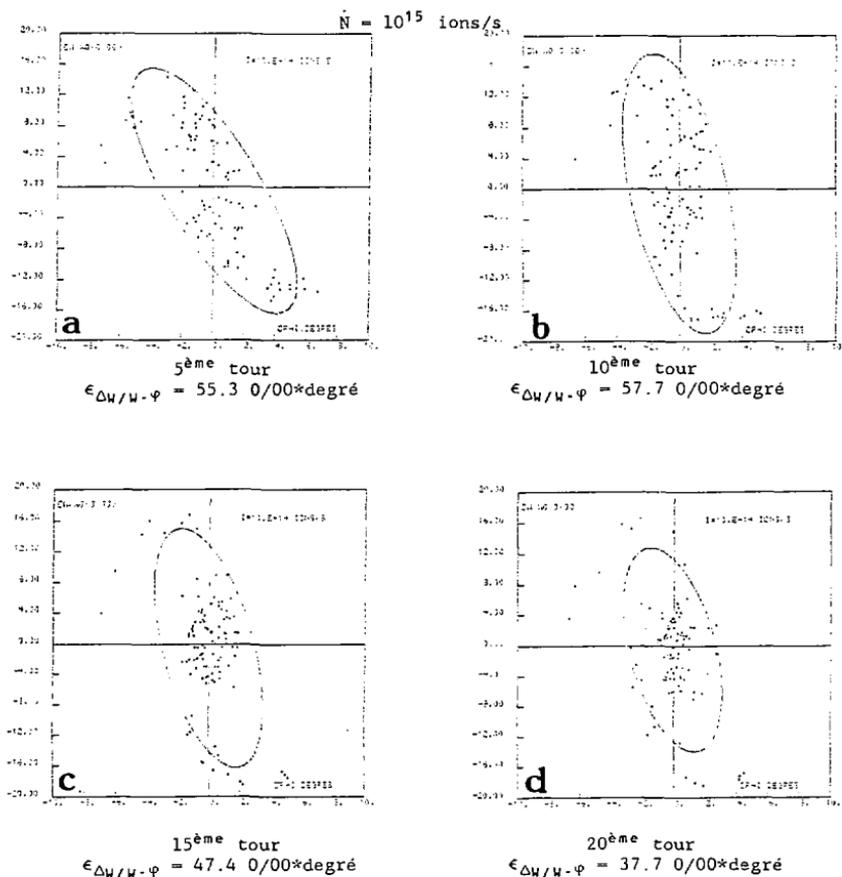
$$\epsilon_{w\varphi} = 17.85 \text{ 0/00}^\circ$$

61^{ème} tour (10^{15} ions/s)

$$\epsilon_{r\ell} = 266.75 \text{ mm}^2\text{mm}$$

$$\epsilon_{w\varphi} = 18.3 \text{ 0/00}^\circ$$

figures 32 a b c d e f



figures 33 a b c d

Le coeur du paquet (zone linéaire) tourne avec la fréquence ν_{r1} , par contre les quelques particules situées dans les 'queues' (zone très non linéaire) vont tourner plus lentement.

En absence de CE le paquet s'allonge proportionnellement au rayon, s'il est bien adapté les dimensions Δr , Δz et $\Delta \varphi$ restent stationnaires, hormis les faibles perturbations introduites par la dispersion en énergie due à l'accélération.

En présence de CE les particules effectuent des oscillations lentes qui modifient le comportement des dimensions du paquet.

Nous observons l'évolution du faisceau sur les figures 31: ΔW (et aussi Δr) tend vers une limite indépendante de l'intensité, $\Delta \ell_{dc}$ (et aussi $\Delta \ell$) décroît et ce d'autant plus que l'intensité augmente. Le faisceau, même en présence d'accélération, tend à devenir rond.

Sur les figures 32 nous montrons le comportement des émittances $\epsilon_{\Delta W/W-\varphi}$ et $\epsilon_{r,z}$ sans CE et pour 10^{15} ions/s:

- sans CE nous observons l'influence sur la dispersion en énergie du deuxième ordre que nous avons négligé lors de l'étude théorique, l'émittance $\epsilon_{\Delta W/W-\varphi}$ se courbe suivant la forme cosinusoidale du champ accélérateur. L'émittance $\epsilon_{r,z}$ s'allonge proportionnellement au rayon.

- en présence de CE le paquet tend à devenir rond dans le plan médian (comportement de $\epsilon_{r,z}$) et il se produit un groupement en phase (comportement de $\epsilon_{\Delta W/W-\varphi}$). Les émittances $\epsilon_{\Delta W/W-\varphi}$ et $\epsilon_{r,z}$ s'effilochent car les quelques particules aux extrémités de la distribution sont soumises à des forces très non linéaires (cf. figure 3). Sur les figures 33 nous pouvons observer ce processus en suivant le comportement de $\epsilon_{\Delta W/W-\varphi}$ pour différents tours. Dans la simulation les forces de CE sont calculées pour une distribution gaussienne de particules; après quelques tours le paquet présente un coeur très dense et des queues très étendues: la distribution qui en résulte n'est bien sûr plus gaussienne.

- les dimensions du paquet tendent à atteindre des limites communes quel que soit l'intensité. Il est difficile d'apprécier ces limites car l'accélération introduit des effets nouveaux: augmentation du rayon et de l'énergie, oscillations de l'ensemble du faisceau. Dans le cas de la dispersion en énergie donnée par $(R_0/2 \Delta W/W)$ cette limite est atteinte pour un rayon R_f tel que: $R_f - R_{0i} \approx \lambda/2$ (cf. ch. II.2.2.2 éq. [86]) c'est à dire en une demi longueur d'onde.

IV. APPLICATION A UN INJECTEUR 'HAUTE INTENSITE'

IV.1 DESCRIPTION SOMMAIRE DU CYCLOTRON A SECTEURS SEPARÉS CSSO:
IV.1.1 Intérêt d'un nouvel injecteur:

Les objectifs fixés pour un éventuel projet d'augmentation d'intensité à GANIL sont⁽¹⁵⁾:

Argon : $\dot{N} \gtrsim 10^{14}$ ions/s sur cible à $W = 40$ à 60 Mev/A

Krypton : $\dot{N} \gtrsim 10^{13}$ ions/s sur cible à $W = 40$ à 60 Mev/A

ce qui implique, compte tenu de l'efficacité de l'éplucheur et des transmissions, d'injecter dans CSS1 :

$$\dot{N} \gtrsim 2 \cdot 10^{14} \text{ ions/s d'Ar}^{6+}$$

$$\dot{N} \gtrsim 4 \cdot 10^{13} \text{ ions/s de Kr}^{12+}$$

De plus, ces intensités doivent être comprises dans l'acceptance de CSS1, soit:

$$\Delta W/W \lesssim 7.5 \cdot 10^{-3} \quad \Delta \varphi \lesssim 7^\circ \quad \epsilon_{zz}, \epsilon_{rr} \lesssim 30 \pi \text{ mm mrad}$$

Dans ces conditions, étant donnée la transmission de l'actuel injecteur C0, les intensités nécessaires à la source ECR externe sont beaucoup trop élevées (4 mA d'Ar⁶⁺, 1.6 mA de Kr¹²⁺), d'où la nécessité de remplacer C0 par un nouvel injecteur plus performant qui pourrait être un CSSO précédé d'une plateforme HT.

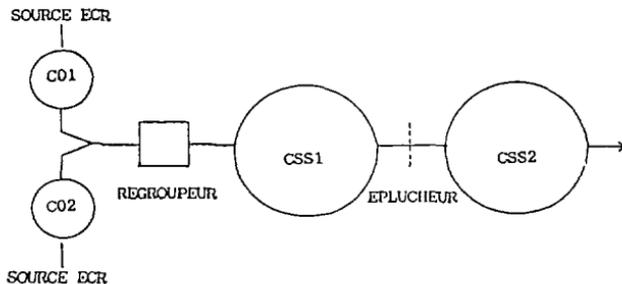


Schéma du GANIL actuel
figure 34

IV.1.2 Paramètres de base d'un CSS0:

Comme CSS0 devrait prendre la place de l'injecteur C0, les impératifs qui en résultent sont⁽¹⁶⁾:

$$\bar{R}_{eject}^{CSS0} = h_{CSS0} \bar{R}_{eject}^{C0} / h_{C0} = 0.1675 h_{CSS0} \text{ mètre}$$

$$\bar{B} \bar{R}_{max}^{CSS0} = B R_{max}^{C0} = 0.764 \text{ Tesla mètre d'où:}$$

$$\bar{B}_{max}^{CSS0} = 4.695 / h_{CSS0} \text{ Tesla}$$

et ceci conduit au choix de:

- l'harmonique d'accélération : $h = 10$
- l'angle des secteurs : $2\alpha = 32^\circ$

En approximation 'hard-edge' nous aurons alors:

$$\nu_{r0} = 1.1988 \quad \nu_{z0} = 1.475$$

$$R_{max}(\text{axe secteurs}) = 1.738 \text{ mètre}$$

$$R_{max}(\text{axe vallées}) = 1.414 \text{ mètre}$$

$$B_{max}^{CSS0} = 1.213 \text{ Tesla}$$

L'énergie d'éjection maximale du CSS0 correspond au cas des ions accélérés à 95 Mev/A à la sortie le CSS2 soit 970 Kev/A à l'entrée de CSS1.

Pour l'injection dans CSS0 à partir d'une plateforme, nous avons la relation:

$$Q/A \times V = W_{eject} \left(\bar{R}_{inj} / \bar{R}_{eject} \right)^2 \quad [87]$$

et le choix des paramètres d'injection s'est porté sur:

$$\bar{R}_{inj}^{CSS0} = 0.625 \text{ mètre} \quad \begin{cases} R_{min}(\text{axe secteurs}) = 0.667 \text{ mètre} \\ R_{min}(\text{axe vallée}) = 0.543 \text{ mètre} \end{cases}$$

d'où pour le cas extrême du Ca^{+8} à l'énergie maximale:

$$V_{inj}^{max}(\text{plateforme}) = 715 \text{ KV} \quad W_{inj}^{max} = 143 \text{ Kev/A}$$

et le gain d'énergie donné par CSS0 est 6.78

Le choix des paramètres pour les cavités accélératrices s'est porté sur (T pour le facteur de temps de transit):

$$2 \delta \text{ (ouverture angulaire des cavités)} = 20^\circ \Rightarrow T_{cav} \approx 0.97$$

$$2 \theta_g \text{ (ouverture angulaire des gaps)} = 4^\circ$$

$$2 a \text{ (ouverture verticale des gaps)} = 5 \text{ cm} \left. \vphantom{\begin{matrix} 2 \theta_g \\ 2 \delta \end{matrix}} \right\} \Rightarrow T_{gap} \approx 0.90$$

Le pas de spiralisation à l'injection fixé à $\sigma_i = 8 \text{ cm}$, conduit à prévoir dans les cavités la tension accélératrice $V_{HF}^{max} \approx 52 \text{ KV}$. La gamme de fréquences s'étendra entre 6.4 MHz et 13.6 MHz. Dans le cas de l'Ar⁶⁺ que nous envisageons ($Q/A = 6/40$, $f_{HF} = 10 \text{ MHz}$ et $V_{HF}^{cav} = 46 \text{ KV}$) les ions effectuent 18 tours dans le cyclotron.

IV. 1.3 La particule centrale:

Il a été montré que, dans le cas habituel de l'accélération avec deux cavités, la correction de l'effet 'GABA' (14) peut être obtenue en introduisant une perturbation de champ $\pm \delta B$ dans les secteurs adjacents (17) telle que:

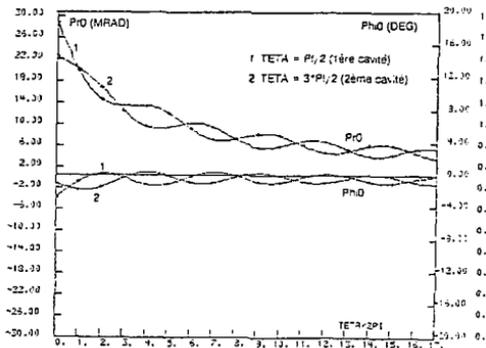
$$\left| \frac{\delta B}{B} \right| = \frac{\sigma_i}{2 \bar{R}_{inj}} \left(\frac{\bar{R}_{inj}}{R} \right)^2 \quad [88]$$

L'injection dans une vallée doit alors s'effectuer avec:

$$R_{inj} = R_{winj} + \sigma/8 \quad [89 a], \quad \beta_{vallée} p_{rinj} = \sigma/8 \cotg(\mu_r/2) \quad [89 b]$$

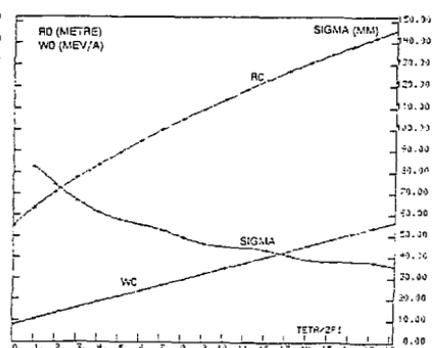
Dans le cas que nous envisageons $\left| \frac{\delta B}{B} \right|_{inj} = 1.81 \%$

Sur les figures [35] et [36] nous avons porté l'évolution des grandeurs caractéristiques de la particule de référence.



W_0, R_0, σ (part. centrale)

figure 35



P_{r0}, Φ_0 (cavités, part. centrale)

figure 36

IV.1.4 Caractéristiques du faisceau injecté:

Compte tenu de l'émittance des sources ECR utilisées, de l'énergie d'injection et de l'efficacité du regroupement dans la ligne source-CSSO, nous pouvons espérer à l'entrée de CSSO:

$$\epsilon_{r1}, \epsilon_{z2} \approx 35 \pi \text{ mm}^2 \text{ mrad} \quad \Delta W/W * \Delta \phi \approx 15 \cdot 10^{-3} * 7.5 \text{ degrés HF}$$

L'adaptation du faisceau nécessite compte tenu des valeurs de ν_r et ν_z :

$$\Delta r_{dc} = 3.2 \text{ mm} \quad \text{d'où } \Delta r_{\text{corrélé}} = 5.2 \text{ mm pour } \Delta W/W = 15 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta z = 3.0 \text{ mm}$$

L'extension en phase du paquet représente à l'injection $\Delta \ell = 10.15 \text{ mm}$

IV.2. TRANSMISSION DU FAISCEAU EN REGIME DE CHARGE D'ESPACE:

IV.2.1 Approche théorique. Limite d'intensité pour CSSO:

Le paquet injecté dans CSSO n'est pas à symétrie de révolution autour de son axe longitudinal. Nous avons calculé les forces linéaires théoriques en assimilant le paquet réel à un ellipsoïde de révolution ayant le même produit ($\Delta r \times \Delta z$). Les forces calculées avec les dimensions initiales du paquet réel et les forces linéaires sont comparées sur la figure [37].

Nous avons trouvé pour $\dot{N} = 10^{14}$ ions/s:

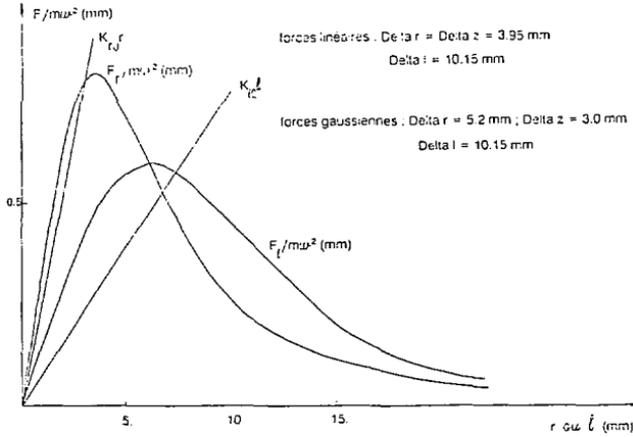
$$K_{r0} = 0.25914 \quad \text{et} \quad K_{z0} = 0.07810$$

$$\text{avec} \quad \Delta r = \Delta z = 3.95 \text{ mm} \quad \Delta \ell = 10.15 \text{ mm}$$

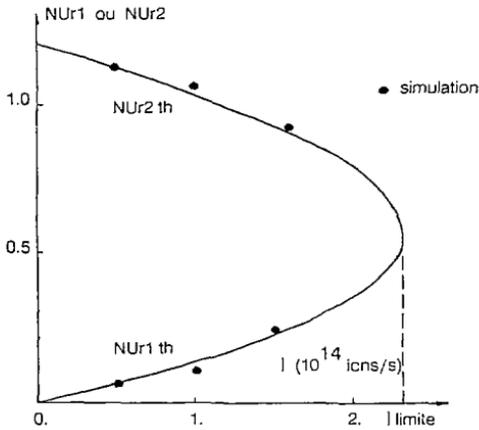
et d'après l'expression [61] (cf ch. II.2.1.2) la limite d'intensité est:

$$\dot{N} = 2.3 \cdot 10^{14} \text{ ions/s pour un faisceau non accéléré.}$$

Sur la figure [38] nous avons représenté la courbe théorique des nombres d'onde ν_{r1} et ν_{r2} en fonction de l'intensité, et porté des points issus de la simulation. Au delà de $1.5 \cdot 10^{14}$ ions/s, les oscillations deviennent trop irrégulières et il n'est pas possible de déterminer des valeurs significatives de ν_{r1} et ν_{r2} . Cette valeur de $1.5 \cdot 10^{14}$ ions/s est à comparer à la valeur théorique trouvée ci-dessus.



forces de CE (gaussiennes et linéaires)
 figure 37



nombre d'onde en fonction de l'intensité
 figure 38

IV.2.2 Résultats de la simulation:

Sur les figures [39 a-m] nous avons représenté pour diverses intensités l'évolution au cours de l'accélération des principales grandeurs caractéristiques du faisceau.

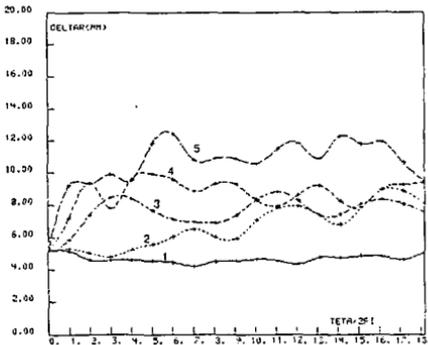
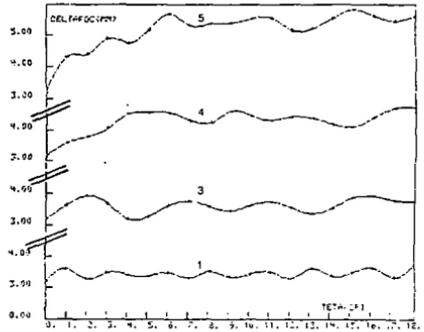
Le tableau [4] résume ces grandeurs à l'éjection en fonction de l'intensité. Sur les figures [40] nous avons porté les ellipses d'émission $\epsilon_{r,z}$ et $\epsilon_{\varphi W}$ à l'injection et à l'éjection pour $\dot{N} = 0$ et $5 \cdot 10^{14}$ ions/s.

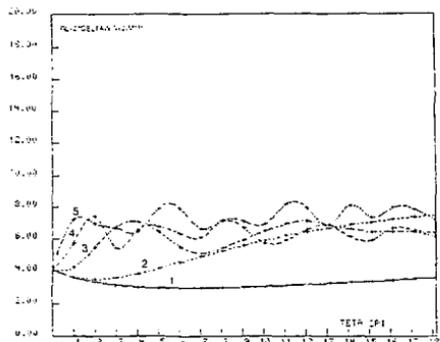
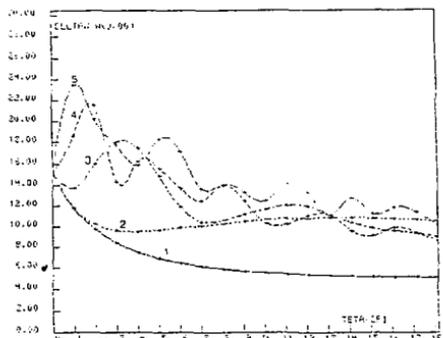
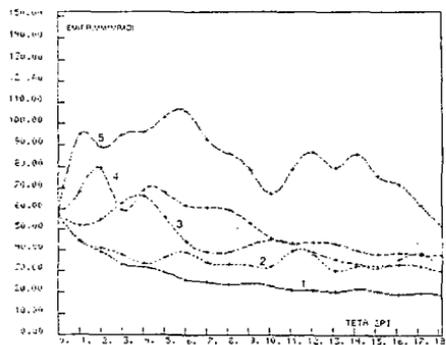
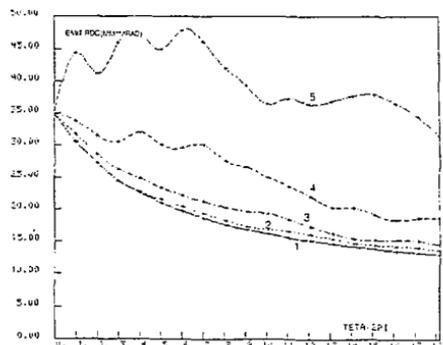
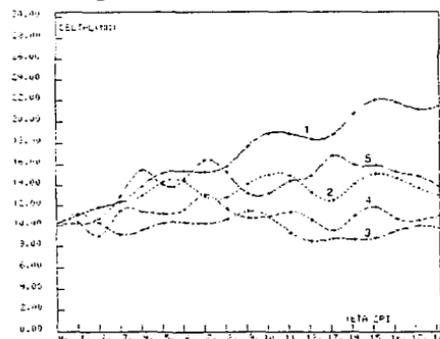
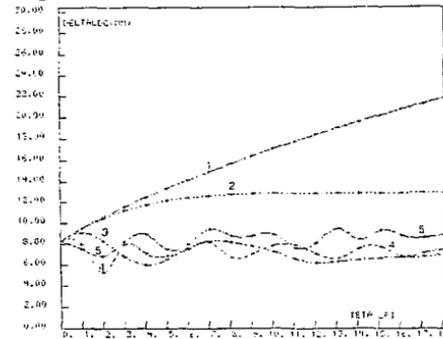
	injection	ejection					
$\dot{N}/10^{14}$ ions/s		0	0.5	1.	2.	5.	10.
Δr (mm)	5.2	5.1	8.2	7.3	7.5	9.4	9.5
Δr_{dc} (mm)	3.2	3.6	3.7	3.5	3.8	4.6	5.5
$\epsilon_{rr'}$ (mm*mrad)	56.6	18.6	29.8	29.2	29.1	37.4	51.0
$\epsilon_{rr'dc}$ (mm*mrad)	35.0	13.1	13.7	14.0	14.6	18.8	31.6
$\Delta \ell$ (mm)	10.1	21.2	12.9	11.4	9.7	10.9	13.7
$\Delta \ell_{dc}$ (mm)	8.2	21.6	12.8	9.7	7.0	7.4	8.8
$\Delta \varphi$ (degré)	9.3	7.3	4.5	4.0	3.3	3.8	4.8
$\Delta \varphi_{dc}$ (degré)	7.5	7.5	4.4	3.4	2.4	2.6	3.1
$\Delta W/W$ (0/00)	15.0	5.0	10.4	8.4	8.5	8.9	10.1
$\epsilon_{\varphi W}$ (degré*0/00)	138.9	36.6	43.6	33.3	28.1	32.9	44.9
$\epsilon_{\varphi_{dc} W}$ (degré*0/00)	112.5	37.3	40.8	28.2	20.5	22.8	30.6
Δz (mm)	3.0	3.2	3.9	3.1	3.3	3.5	3.6
$\epsilon_{zz'}$ (mm*mrad)	35.0	13.6	15.2	14.5	14.3	13.7	16.7

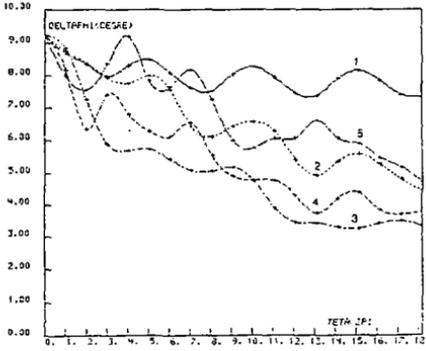
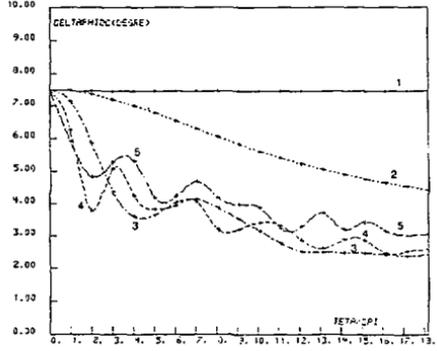
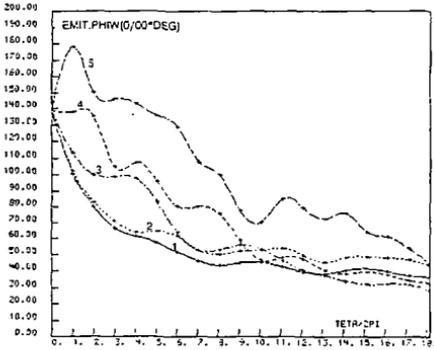
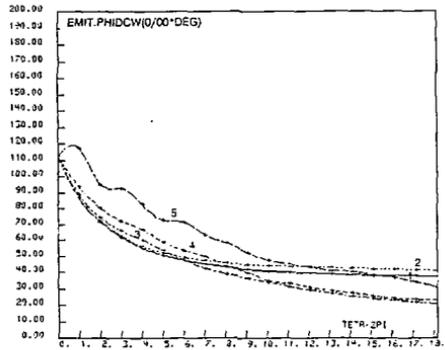
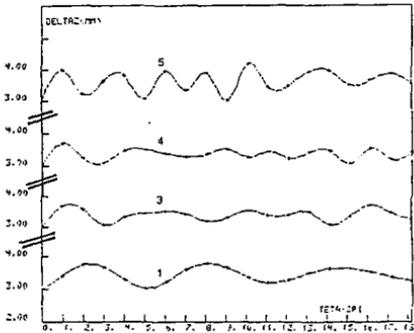
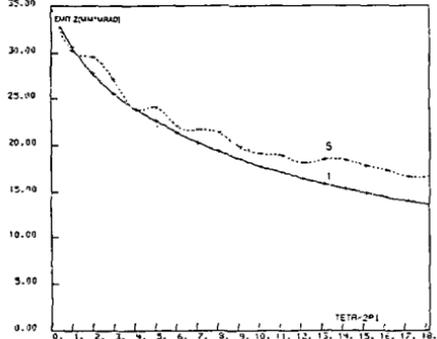
tableau 4

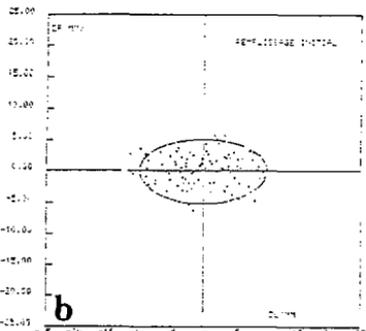
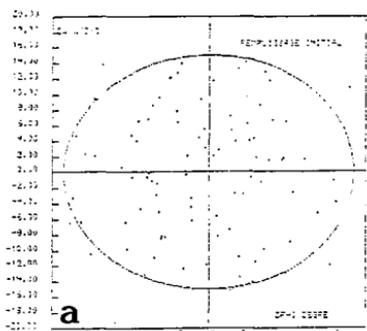
Pour toutes les figures 39 les courbes sont numérotées:

- 1- $\dot{N} = 0$ ions/s 2- $\dot{N} = 0.5 \cdot 10^{14}$ ions/s
 3- $\dot{N} = 2 \cdot 10^{14}$ ions/s 4- $\dot{N} = 5 \cdot 10^{14}$ ions/s 5- $\dot{N} = 10^{15}$ ions/s

fig. 39 a: évolution de Δr fig 39 b: évolution de Δr_{dc}

fig. 39 c: évolution de $R0/2*\Delta W/W0$ fig. 39 d: évolution de $\Delta W/W0$ fig. 39 e: évolution de Err fig. 39 f: évolution de $Errdc$ fig. 39 g: évolution de $\Delta \ell$ fig. 39 h: évolution de $\Delta \ell dc$

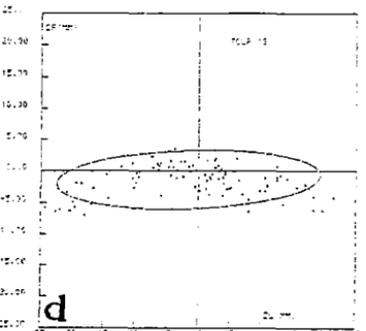
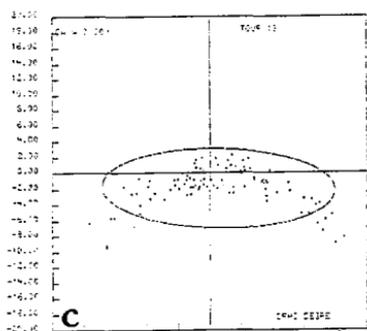
fig. 39 i: évolution de Δp fig. 39 j: évolution de Δp_{dc} fig 39 k: évolution de $\epsilon\phi_w$ fig 39 l: évolution de $\epsilon\phi_{dcw}$ fig. 39 m: évolution de Δz fig 40 n: évolution de ϵ_{zz}



remplissage initial

$$\epsilon_{\varphi W} = 138.9 \text{ degré}^*0/00$$

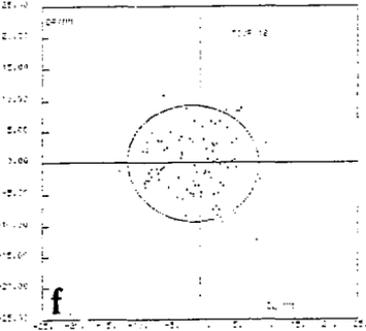
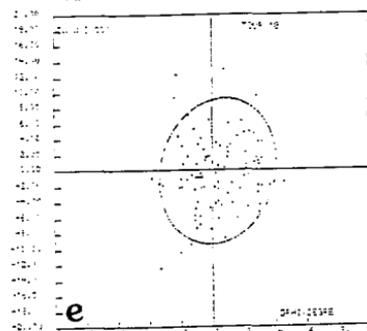
$$\epsilon_{r,z} = 52.4 \text{ mm}^* \text{mm}$$



tour 18 N = 0 ions/s

$$\epsilon_{\varphi W} = 36.6 \text{ degré}^*0/00$$

$$\epsilon_{r,z} = 96.0 \text{ mm}^* \text{mm}$$

tour 18 : N = 5. 10¹⁴ ions/s

$$\epsilon_{\varphi W} = 32.9 \text{ degré}^*0/00$$

$$\epsilon_{r,z} = 96.6 \text{ mm}^* \text{mm}$$

figures 40 a b c d e f

IV.2.3 Conclusion:

Nous retrouvons bien les comportements décrits dans notre partie théorique. Les effets de la CE dans CSSO sont très sensibles pour des intensités de l'ordre de 10^{14} ions/s. D'un point de vue pratique, ils se caractérisent essentiellement par:

- l'augmentation de la dispersion en énergie qui tend vers une limite indépendante de l'intensité: $\Delta W/W \rightarrow \approx 10^{-2}$; cette limite étant atteinte dès les premiers tours (cf. III.3.2).

- la tendance du faisceau à devenir rond dans le plan médian: forte compression de phase et augmentation de sa dimension radiale ($\Delta r \times \Delta \ell \approx 100 \text{ nm}^2$).

En fait, nous obtenons dans le plan médian un coeur très dense contenant plus de 90% des ions; nous pouvons alors éliminer les queues (à l'énergie de CSSO il n'y a pas de problème) et ne conserver que le coeur pour l'injection dans CSS1: dans ces conditions, le courant limite pouvant être accéléré par CSSO dans l'acceptance de CSS1 peut atteindre $5 \cdot 10^{14}$ voire 10^{15} ions/s (rappelons que seules les valeurs décorréliées sont à prendre en considération).

Remarquons enfin qu'il serait intéressant d'injecter dans CSSO un faisceau rond ($\Delta \ell = \Delta r$ à l'injection): pour une émittance radiale donnée à la source, le seul paramètre permettant d'atteindre cet objectif est le système de regroupement situé entre le pré-injecteur et CSSO. Il n'est cependant pas du tout sûr que l'on puisse arriver à une solution permettant d'injecter une intensité élevée dans la faible extension en phase requise.

IV.3. ESSAIS DE COMPENSATION DE LA CHARGE D'ESPACE:

IV.3.1 Considérations théoriques:

Comme nous l'avons vu au chapitre II.2.2.2, les équations qui décrivent le mouvement lent d'une particule sont (cf ch. II.2.2.2):

$$\dot{r} + \frac{\dot{R}_0}{R_0} r = (K_{z0} + n_z \frac{\dot{R}_0}{R_0}) \ell_{dc} \quad [82]$$

$$\dot{\ell}_{dc} + r - \delta W = \frac{\dot{R}_0}{R_{0i}} \ell_{dc i} \quad [83]$$

$$\dot{\ell}_{dc} + (K_{z0} + \frac{\dot{R}_0}{R_0} n_z) \frac{K_{r0}}{\nu_r^2} \ell_{dc} + (2 - 1/\nu_r^2) \frac{\dot{R}_0}{R_0} \ell_{dc} = \frac{\nu_r^2 - 1}{\nu_r^2} \left(\frac{\dot{R}_0}{R_0} \right)^2 \frac{R_0}{R_{0i}} \ell_{dc i} \quad [84]$$

Nous voyons que nous pouvons éliminer l'effet de la partie linéaire des forces de charge d'espace si nous accélérons de façon telle que :

$$K_{\ell 0} + n_{\ell}(\dot{R}_0/R_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad n_{\ell} = -K_{\ell 0} (R_0/\dot{R}_0) \quad [90]$$

c'est à dire, comme $\dot{R}_0 R_0 = \dot{R}_{0i} R_{0i}$ (cf ch II.2.2.1) et $K_{\ell 0} R_0 = \text{cst.}$ (cf. annexe I.3) avec un 'indice' de champ accélérateur :

$$n_{\ell} = -(K_{\ell 0i}/\dot{R}_{0i})R_0 = -2\pi (K_{\ell 0i}/\sigma_i) R_0 \quad [91]$$

Bien que les forces de charge d'espace diminuent comme le rayon, l'indice de champ électrique nécessaire pour les compenser doit croître comme le rayon : ceci est dû à la décroissance en R_0^{-2} du rapport \dot{R}_0/R_0 .

En accélérant avec l'indice de champ variable défini par [91], nous retrouvons bien sûr les équations du mouvement lent en absence de forces de CE.

Remarquons cependant que ces résultats ne sont qu'approchés : ils impliquent un 'indice' de champ variable alors que dans la théorie exposée au chapitre I nous l'avons supposé constant. D'autre part la théorie ne prend pas en compte les termes du second ordre qui deviendront importants si nous annulons ceux du premier ordre.

Nous pouvons obtenir un tel 'indice' de champ en employant diverses méthodes, en particulier en accélérant le faisceau sur le flanc d'une cosinusoïde ou par un plateau de champ.

IV.3.2 Accélération sur le flanc:

Nous pouvons obtenir la loi [91] en accélérant les particules sur le flanc de la cosinusoïde (cf chapitre I.2.2); en effet :

$$n_{\ell} = h \operatorname{tg} \varphi_0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2\pi K_{\ell 0i}}{h \sigma_i} R_0 \quad \text{avec } \varphi_0 < 0$$

$$\text{d'où la loi de phase : } |\varphi_0| = \operatorname{arctg} \left(\frac{2\pi K_{\ell 0i}}{h \sigma_i} R_0 \right) \quad [92]$$

que nous pouvons réaliser au moyen du défaut de champ $\left| \frac{\Delta B}{B} \right|$ tel que:

$$\left| \frac{\Delta B}{B} \right| = \frac{|\Delta\phi|}{2\pi h N_T} \quad [93]$$

où N_T est le nombre de tours qu'effectuent les particules dans le cyclotron.

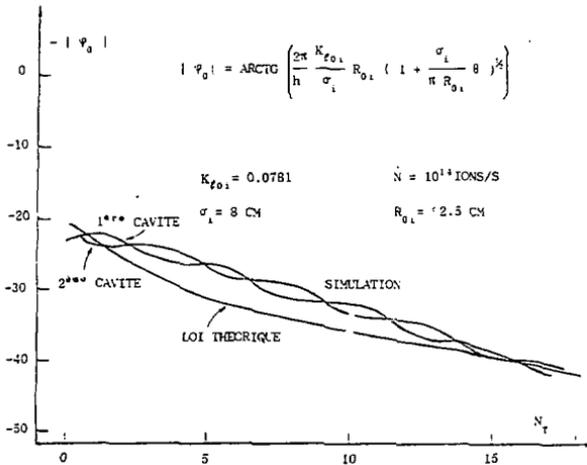
D'après [92], nous trouvons que pour compenser les effets de la CE produits par $\dot{N} = 10^{14}$ ions/s il faut avoir ($K_{f0i} = 0.0781$ et $\sigma_i \approx 8$ cm) :

$$\varphi_{0inj\ th} = -21^\circ \quad \varphi_{0eject\ th} = -42^\circ.9$$

et nous pouvons approximer cette loi avec le défaut de champ:

$$\frac{\Delta B}{B} = 3.3 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \Delta\phi = -21^\circ.4$$

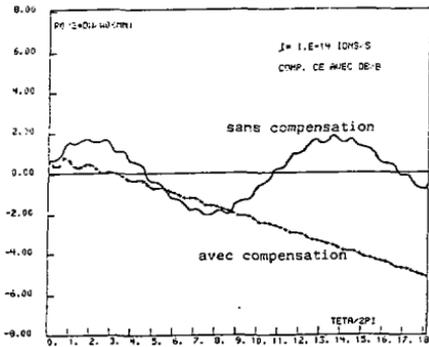
Sur la figure [41] nous comparons la loi théorique à celle que nous avons introduite.



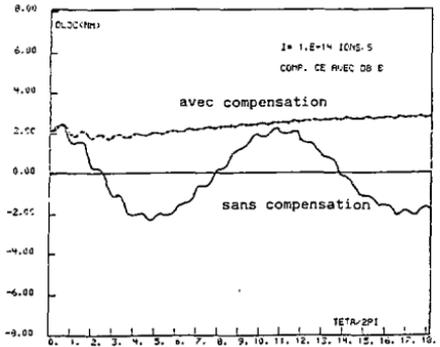
loi pour la phase φ_0 (simulée et théorique)

figure 41

Les résultats obtenus avec cette loi de phase sont représentés sur les figures 42 a et b qui montrent les évolutions des variables δW et ℓ_{dc} pour une particule; pour comparaison sont aussi reportées ces évolutions en absence de compensation : nous voyons clairement la suppression des oscillations.

$$N = 10^{14} \text{ ions/s} :$$


oscillations radiales lentes
figure 42 a



oscillations longitudinales lentes
figure 42 b

Cependant, pour une compensation parfaite nous devrions avoir la variable $\ell_{dc} \propto R_0 \propto \sqrt{Nt}$ (ou $\sqrt{\theta}$) et la variable $\delta W \propto 1/R_0$; nous voyons que ce n'est pas le cas : ℓ_{dc} n'augmente pas assez vite et δW décroît trop vite et change même de signe.

Si de plus nous regardons la projection du faisceau dans l'espace $(\Delta W - \Delta\varphi)$ ou $(\Delta r - \Delta\ell)$ (figures 43 a et b) nous voyons que nous avons obtenu une dispersion d'énergie pratiquement proportionnelle à $(\sin \bar{\varphi}_0 \Delta\varphi)$: il semble que nous ayons, et de beaucoup, surcompensé les effets de la charge d'espace, du moins sur l'ensemble du cycle d'accélération. Il est évident qu'une étude beaucoup plus fouillée est nécessaire.

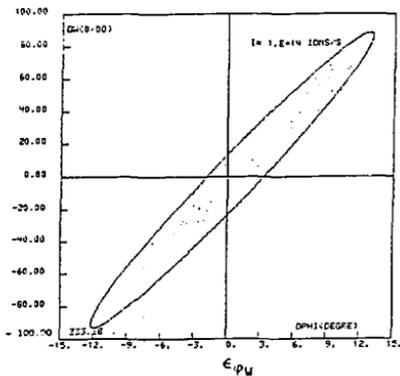
$$N = 10^{14} \text{ ions/s}$$


figure 43 a

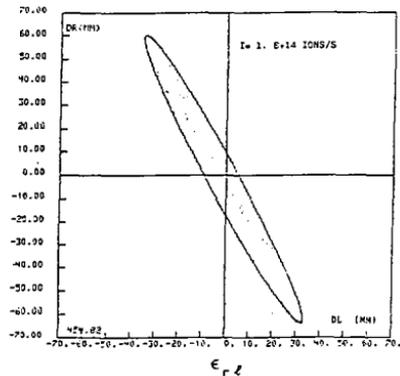


figure 43 b

IV.3.3 Accélération avec un plateau de champ:

L'onde accélératrice résultante de l'application d'un plateau de champ est de la forme:

$$V = V_0 (\cos\varphi_0 - A \cos(n\varphi_0 + \psi)) = V_0 f(\varphi_0) \quad [94]$$

avec $A = V_n/V_0$, où V_n est l'amplitude crête de l'onde HF de correction, n est le rang de l'harmonique utilisé et ψ le déphasage entre l'onde accélératrice principale et l'onde de correction.

A partir de [94] nous obtenons:

$$df/d\varphi|_0 = -\sin\varphi_0 + A n \sin(n\varphi_0 + \psi) \quad [95]$$

soit pour $\varphi_0 = 0$ (accélération sur la crête de l'onde principale):

$$df/d\varphi|_0 = A n \sin\psi$$

et d'après [17] (cf. ch. I.2.3) et [91], l'indice du champ accélérateur devient:

$$n_\ell = -\frac{n h A \sin\psi}{1 - A \cos\psi} = -2\pi \frac{K_{\ell 0 i}}{\sigma_i} R_0 \quad [96]$$

Cette relation implique que pour compenser les effets de CE par un plateau de champ, la tension ou la phase de l'onde de correction devra varier avec le rayon, ce qui n'est certainement pas très évident à réaliser. Nous n'avons pas simulé cette méthode de correction.

IV.3.4 Conclusion:

Notre formalisme suggère que l'on puisse contrebalancer la partie linéaire des effets de la CE en utilisant une onde accélératrice possédant un 'indice' $n_\ell = -(h/V) dV/d\varphi$ proportionnel au rayon ($n_\ell \propto R_0$). L'accélération sur le flanc de la sinusoïde ou un plateau de champ permet d'obtenir cet indice. Cependant, s'il est facile d'assurer la variation de l'indice n_ℓ avec le rayon dans le cas de l'accélération sur le flanc (au moyen d'un défaut $\Delta B/B$ (\dot{N}) éventuellement variable avec le rayon), il semble plus difficile de varier les caractéristiques d'un plateau de champ (V_n et/ou $\psi = f(R_0, \dot{N})$). Seule la simulation de l'accélération sur le flanc a été faite. Les résultats ne sont cependant pas satisfaisants et une étude beaucoup plus approfondie des moyens de compensation reste à faire.

CONCLUSION

Notre travail a eu comme but l'étude par simulation sur ordinateur des effets de la charge d'espace dans les cyclotrons du GANIL et en particulier, dans un éventuel cyclotron injecteur à secteurs séparés qui, prenant la place des injecteurs actuels, permettrait d'obtenir des intensités très élevées.

Dans un premier temps nous avons utilisé le code multiparticules NAJO développé à GANIL dans lequel nous avons simulé les effets de la CE en utilisant la méthode des ellipsoïdes équivalents.

Nous avons commencé par mettre au point ce nouveau code de calcul et, en particulier, par examiner soigneusement l'influence sur la dynamique des particules et le comportement du faisceau des différentes approximations introduites (compromis à trouver entre le temps de calcul et les effets pris en compte). L'exploitation systématique de ce code a mis en évidence des comportements très caractéristiques de la dynamique des particules en présence de CE.

Afin de comprendre les raisons de tels comportements nous avons établi un modèle théorique de cyclotron isochrone en régime de CE et en avons déduit les équations différentielles qui régissent les petits mouvements des particules autour d'une particule de référence. En ne considérant que la partie linéaire des champs accélérateur et de CE, nous avons résolu ce système d'équations différentielles au premier ordre. Nous avons retrouvé les résultats déjà bien connus de la dynamique des particules dans un cyclotron et mis en évidence certains phénomènes plus ou moins connus jusqu'alors, en particulier:

- l'impossibilité d'obtenir une trajectoire de la particule de référence parfaitement centrée sur toute l'étendue radiale du cyclotron.
- l'apparition dans le plan médian, sous l'effet des forces de CE, d'oscillations lentes qui se superposent au mouvement bêatron: l'isochronisme est détruit, sauf bien sûr pour la particule de référence, et l'ensemble du faisceau se met à tourner autour de cette particule.

Ces résultats sont valables au centre du paquet d'ions, zone où nous pouvons considérer que les forces agissant sur une particule sont linéaires: dans cette zone, la comparaison entre les résultats donnés par notre modèle théorique et ceux issus de la simulation est très satisfaisante.

Le comportement de l'ensemble du faisceau a été étudié numériquement; la simulation inclut tous les phénomènes non linéaires. Nous avons remarqué que le paquet de particules évolue vers une symétrie de révolution dans le plan horizontal: les dimensions dans ce plan (Δr , $\Delta \ell$) tendent vers une valeur limite commune indépendante de l'intensité (dans un certain domaine tout au moins). Le nombre de tours nécessaires pour atteindre ces limites est inversement proportionnel à l'intensité appliquée, plus précisément il équivaut à une demi période de l'oscillation lente.

En ce qui concerne l'étude de la transmission des faisceaux intenses dans l'injecteur à secteurs séparés CSS0, notre étude montre que pour les courants requis dans un éventuel projet d'augmentation de l'intensité, 90% des particules éjectées sont comprises dans l'acceptance de CSS1. Ce résultat est acquis sans méthode de compensation de la CE.

Notre formalisme suggère des possibilités qui permettraient de compenser la partie linéaire des forces de CE (le coeur du paquet) : simples en théorie ces méthodes semblent toutefois difficiles à régler pratiquement. Une étude complémentaire est nécessaire.

L'étude des effets produits par la CE a été aussi abordée dans d'autres laboratoires sous des optiques différentes : par exemple l'étude de l'évolution des valeurs quadratiques moyennes du faisceau⁽⁷⁾ ou des relations qui lient l'évolution de l'émittance à l'énergie du champ de CE⁽²⁰⁾. Nous n'avons pas envisagé ces méthodes très globales bien que la première puisse éventuellement être appliquée à notre modèle.

En résumé, nous avons mis au point deux outils qui nous permettent d'étudier les effets de la CE dans un cyclotron :

- un code de simulation que nous pensons très performant.
- un modèle théorique que nous avons exploité dans l'approximation linéaire et qui nous a permis de bien analyser le comportement du coeur du faisceau.

L'étude systématique des méthodes propres à combattre les effets de la CE, méthodes suggérées par notre modèle, n'a pas été menée à son terme dans ce travail, et nous pensons de plus que toutes les implications de ce modèle n'ont pas encore été exploitées.

ANNEXE I

I.1 Résolution des équations du mouvement sans accélération et avec CE:

Le système d'équations à résoudre dans le plan médian s'écrit :

$$\ddot{r} + (\nu_{r0}^2 - 1)(r - \delta W) - \dot{\ell} - K_{r0}r \quad (I.1)$$

$$\dot{\ell} + r = \delta W \quad (I.2)$$

$$\delta \dot{W} = K_{\ell 0} \ell \quad (I.3)$$

Nous pouvons remplacer $(r - \delta W)$ dans (I.1) par $(-\dot{\ell})$ d'après (I.2):

$$r^{(2)} - \nu_{r0}^2 \ell^{(1)} - K_{r0}r = 0 \quad (I.4)$$

et en dérivant deux fois :

$$r^{(4)} - \nu_{r0}^2 \ell^{(3)} - K_{r0}r^{(2)} = 0 \quad (I.5)$$

nous dérivons (I.2) deux fois, une fois (I.3) pour obtenir :

$$\ell^{(3)} + r^{(2)} - \delta W^{(2)} = \ell^{(3)} + r^{(2)} - K_{\ell 0} \ell^{(1)} = 0 \quad (I.6)$$

et nous remplaçons $\ell^{(3)}$ et $\ell^{(1)}$ dans (I.6) par leurs expressions en fonction de r (d'après (I.5) et (I.1)) pour obtenir finalement :

$$r^{(4)} + (\nu_{r0}^2 - K_{r0} - K_{\ell 0})r^{(2)} + K_{r0}K_{\ell 0}r = 0$$

Nous pouvons aussi dériver une fois (I.4) :

$$r^{(3)} - \nu_{r0}^2 \ell^{(2)} - K_{r0}r^{(1)} = 0 \quad (I.7)$$

et nous introduisons dans (I.7) la dérivée de l'expression (I.2) puis l'équation (I.3) :

$$r^{(3)} - \nu_{r0}^2 \ell^{(2)} - K_{r0}K_{\ell 0} \ell + K_{r0} \ell^{(2)} = 0 \quad (I.8)$$

en dérivant deux fois (I.3), trois fois (I.2), et en remplaçant $r^{(3)}$ par l'expression en fonction de ℓ et ses dérivées trouvée en (I.8) nous obtenons finalement :

$$\ell^{(4)} + (\nu_{r0}^2 - K_{r0} - K_{\ell 0}) \ell^{(2)} + K_{r0}K_{\ell 0} \ell = 0$$

I.2 Résolution des équations du mouvement avec accélération et GE:

Les équations qui décrivent le mouvement lent en présence d'accélération et GE sont:

$$(\nu_r^2 - 1)(r - \delta W) - \dot{\ell}_{dc} = K_{r0} r - \dot{R}_0 / R_0 \ell_{dc} \quad (I.9)$$

$$\dot{r} = K_{\ell 0} \ell_{dc} - \dot{R}_0 / R_0 (r - n_\ell \ell_{dc}) \quad (I.10)$$

$$\dot{\ell}_{dc} + r - \delta W = \dot{R}_{0i} \ell_{dci} / R_0 - \dot{R}_0 \ell_{dci} / R_{0i} \quad (I.11)$$

Nous remplaçons $(r - \delta W)$ dans (I.9) en nous servant de (I.11) et nous obtenons, en multipliant par R_0 :

$$(\nu_r^2 - 1) \dot{R}_{0i} \ell_{dci} - \nu_r^2 R_0 \dot{\ell}_{dc} = - \dot{R}_0 \ell_{dc} + K_{r0} R_0 r \quad (I.12)$$

nous dérivons cette expression, nous nous servons de (I.9) et de (I.10) pour remplacer $(K_{r0} r)$ et \dot{r} par des expressions qui dépendent seulement de la variable ℓ_{dc} et nous tenons compte du fait que $R_0 K_{r0} = \text{Cst}$ (de même pour $R_0 K_{\ell 0}$) et que $\ddot{R}_0 / R_0 + (\dot{R}_0 / R_0)^2 = 0$; finalement nous obtenons:

$$\ddot{\ell}_{dc} + K_{r0} K_{\ell 0} / \nu_r^2 \ell_{dc} = \dot{R}_0 / R_0 \left\{ (1/\nu_r^2 - 2) \dot{\ell}_{dc} - K_{r0} n_\ell \ell_{dc} / \nu_r^2 + (\nu_r^2 - 1) / \nu_r^2 \dot{R}_0 \ell_{dci} / R_{0i} \right\}$$

Dans le cas particulier où $\nu_r^2 \approx 1$ et $n_\ell = 0$ nous avons à résoudre l'équation suivante :

$$\ddot{\ell}_{dc} + K_{r0} K_{\ell 0} \ell_{dc} + \dot{R}_0 / R_0 \dot{\ell}_{dc} = 0 \quad (I.13)$$

Nous pouvons utiliser les résultats obtenus dans le chapitre II.2.2.2, c'est à dire:

$$\ell_{dc} = A \cos \int_0^{\theta_0} \Omega(\theta) d\theta \quad \text{avec } A = \text{cst} \quad \text{et} \quad \Omega^2(\theta_0) = K_{r0} K_{\ell 0} \quad (I.14)$$

nous intégrons $\Omega(\theta)$ (l'indice "i" correspond aux valeurs initiales):

$$\int_0^{\theta_0} \Omega(\theta) d\theta = \int_0^{\theta_0} (K_{r0i} K_{\ell 0i})^{1/2} d\theta \quad \text{avec } K_{r0} K_{\ell 0} = K_{r0i} K_{\ell 0i} (R_{0i} / R_0)^2$$

d'où, en utilisant l'expression [74] (cf. ch II.2.2.1.) pour R_0 :

$$\int_0^{\theta_0} \Omega(\theta) d\theta = \int_0^{\theta_0} (K_{r0i} K_{\ell 0i})^{1/2} \left(1 + \frac{\sigma_i}{\pi R_{0i}} \theta\right)^{-1/2} d\theta = (K_{r0i} K_{\ell 0i})^{1/2} \frac{2\pi R_{0i}}{\sigma_i} \left(1 + \frac{\sigma_i}{\pi R_{0i}} \theta\right)^{1/2} \Big|_0^{\theta_0}$$

donc, en fonction du rayon:

$$\int_0^{\theta_0} \Omega(\theta) d\theta = (K_{r0i} K_{\ell 0i})^{1/2} \frac{2\pi}{\sigma_i} (R_0 - R_{0i}) \quad (I.15)$$

Nous remarquons aussi que nous pouvons exprimer (I.13) en fonction de ses dérivées par rapport à R_0 à la place de θ_0 :

$$d/d\theta_0 = \dot{R}_0 d/dR_0 \quad \text{et} \quad d^2/d\theta_0^2 = (\dot{R}_0)^2 (d^2/dR_0^2 - d/dR_0 \cdot 1/R_0)$$

et comme $\dot{R}_0 = \sigma_i R_{0i} / 2\pi R_0$; (I.21) s'écrit:

$$d^2 \ell_{dc} / dR_0^2 + (2\pi/\sigma_i)^2 K_{r0i} K_{\ell 0i} \ell_{dc} = 0$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique où la longueur d'onde de l'oscillation est $\sigma_i / \sqrt{K_{r0i} K_{\ell 0i}}$. La variable ℓ_{dc} est une fonction cosinusoidale qui varie en fonction de $(\theta_0)^{1/2}$ à travers R_0 .

Pour le mouvement radial et en exprimant (I.10) en fonction des dérivées par rapport à R_0 :

$$R_0 \dot{r} = R_0 K_{\ell 0i} \cdot 2\pi / (\sigma_i R_{0i}) \int R \ell_{dc} dR$$

Nous nous servons de (I.14) et (I.15) pour effectuer ensuite une intégration par parties; ce qui donne:

$$r = A \left\{ \sqrt{K_{\ell 0i} / K_{r0i}} \sin((R_0 - R_{0i})/\lambda - \alpha) + \sigma_i / (2\pi K_{r0i} R_0) \cos((R_0 - R_{0i})/\lambda - \alpha) \right\}$$

avec $\lambda = \sigma_i / (2\pi \sqrt{K_{r0i} K_{\ell 0i}})$ et avec les conditions initiales :

$$\dot{\ell}_{dc i} + \dot{R}_0 / R_0 \ell_{dc i} = K_{r0i} \dot{r}_i \quad \text{et} \quad R_{0i} \dot{r}_i + \dot{R}_0 r_i = R_{0i} K_{\ell 0i} \ell_{dc i}$$

I.3 Validité de l'approximation $K_{x0} * R_0 = \text{cst}$:

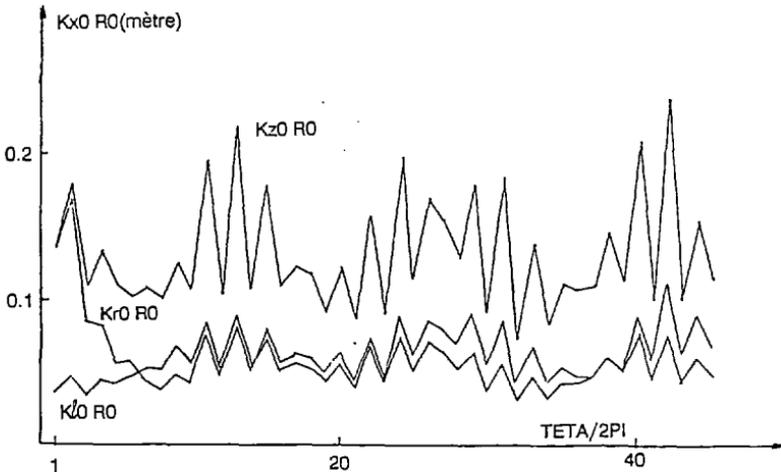
Sur les figures I.1 a et I.1 b nous avons représenté pour la particule étudiée la valeur de $K_{x0}R_0$ ($x = r, \ell$ ou z) dans la première vallée libre. Les valeurs initiales calculées pour 10^{15} ions/s :

$$K_{r0i}R_{0i} = K_{z0i}R_{0i} = 0.146 \text{ m} \quad K_{\ell0i}R_{0i} = 0.032 \text{ m}$$

sont en bon accord avec la simulation.

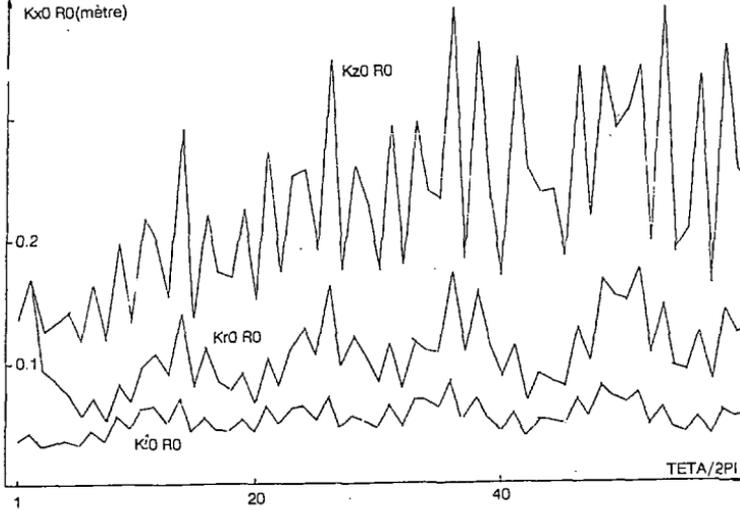
Pour le mouvement non accéléré (figure I.1 a): le gradient de la force axiale est en moyenne constant autour de sa valeur initiale. Dans le plan médian les gradients tendent à s'égaliser, dès les premiers tours K_{r0} décroît et K_{z0} croît (Δr croît et $\Delta \ell$ décroît: le faisceau devient rond).

Nous remarquons que les produits $K_{x0}R_0$ sont affectés sur la figure d'une oscillation de période $T \approx 14.5$ tours $\approx 1 / (2|v_{r2} - 1|)$ ($v_{r2} \approx 0.96$ pour 10^{15} ions/s.). Cette période correspond aux oscillations produites par un défaut d'adaptation du faisceau quand il est échantillonné une fois par tour.



variations de $K_{z0}R_0$, $K_{r0}R_0$ et $K_{\ell0}R_0$ (mouvement non accéléré)
figure I.1 a

Pour le mouvement accéléré (figure I.1 b) : le produit $K_{z0}R_0$ ne reste plus constant en moyenne. Par contre dans le plan médian les produits $K_{r0}R_0$ et $K_{\theta 0}R_0$ demeurent bien à peu près constants en moyenne. Cependant ils ne tendent pas comme en absence d'accélération vers une valeur commune : le faisceau ne devient pas tout à fait rond, du moins pour cette intensité.



variations de $K_{z0}R_0$, $K_{r0}R_0$ et $K_{\theta 0}R_0$ (mouvement accéléré)
figure I.1 b

ANNEXE II

(19)

II.1 Le programme de simulation NAJO:

Le programme multiparticules à trois dimensions NAJO (6 dimensions dans l'espace de phases) a été développé dans le cas d'un cyclotron à quatre secteurs séparés; en fait il peut accepter une autre configuration de champ magnétique, sa limitation principale provient du fait que les intervalles d'accélération sont disposés radialement. Les effets des champs accélérateurs sont assimilés à des percussions appliquées au centre des intervalles d'accélération, d'où le découplage total entre le traitement des champs d'induction magnétique et électromagnétiques. Deux versions simplifiées du programme ont été développées, l'une se limite à l'étude dans le plan médian, l'autre à l'étude de la particule de référence. Dans la version la plus générale, le code prend en compte les effets de la CE.

II.2 Description sommaire de NAJO:

II.2.1 Traitement du champ magnétique:

Les équations du mouvement des particules dans le champ d'induction magnétique sont exprimées en coordonnées cylindriques, l'azimut étant la variable indépendante. Les composantes du champ magnétique sont prises au premier ordre en z ; le champ n'a donc à être introduit que dans le plan médian.

La méthode d'intégration des équations est celle de RUNGE-KUTTA de 4^{ième} ordre, avec un pas d'intégration fixe de 1° . Cette méthode nécessite la connaissance du champ au milieu du pas d'intégration, ce champ est donc introduit point par point tous les 0.5° sur 360° sur une série de rayons régulièrement espacés. Pour chaque azimut, les composantes du champ sont calculées pour chaque particule du paquet selon sa position radiale. Ceci est fait en utilisant un polynôme d'interpolation de 3^{ème} degré en R pour B_z et B_r et deux interpolations linéaires successives en θ et R pour B_θ . Les coefficients des polynômes d'interpolation sont les mêmes à un azimut donné pour toutes les particules du paquet, ils sont calculés à partir de la position radiale de la particule centrale à l'entrée de l'intervalle d'intégration et conservés pour les 3 azimuts d'un pas d'intégration, ce qui implique que sur un pas d'intégration les trajectoires n'aient pas une variation radiale trop rapide devant le pas radial de la carte de champ. Le champ introduit tient compte de tous les éléments magnétiques présents dans un cyclotron à l'injection et à l'éjection, aussi bien que des perturbations réelles ou calculées. Dans notre étude, dont le but est l'étude des effets de CE, nous avons utilisé un champ 'hard-edge' analytique.

II.2.2 Traitement du passage par un intervalle d'accélération:

Les intervalles d'accélération sont radiaux et leur axe coïncide obligatoirement avec l'extrémité d'un pas d'intégration. Dans notre cas le système d'accélération se compose de deux cavités diamétralement opposées, chacune comportant deux intervalles d'accélération symétriques par rapport à l'axe de la cavité. Occasionnellement une troisième ou quatrième cavité peuvent être introduites : celles qui produisent un plateau de champ.

Les percussions dans les intervalles d'accélération sont calculées avec les approximations usuelles d'une lentille mince: vitesse et position constantes. Leurs expressions sont, en prenant la tension accélératrice linéairement variable avec le rayon : $V = V_0 + V_p(R-R_0)$ et la phase $\varphi = \omega t + \varphi_0$:

$$\begin{cases} \delta W = T \operatorname{ch}(\eta z) V(R) \cos\varphi & (a) \\ \delta(mv_r) = -T \operatorname{ch}(\eta z) V_p/\omega \sin\varphi & (b) \\ \delta(mv_z) = -T \eta \operatorname{sh}(\eta z) V(R)/\omega \sin\varphi & (c) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

De façon à garder la cohérence du programme, T et η ont la même valeur pour toutes les particules. Ils sont calculés pour la particule centrale:

$$\eta = \omega/v_g \sqrt{1-\beta^2} \quad (\text{II.2.a}) \quad T = Q/A \sin(\omega \theta_g R/v_g)/(\omega \theta_g R/v_g \operatorname{ch}(\eta a_g)) \quad (\text{II.2.b})$$

où $2\theta_g$ et $2a_g$ sont les ouvertures azimutale et verticale de l'intervalle d'accélération. Dans notre cas V est une constante, alors $\delta m v_r = 0$.

II.2.3 L'injection des particules:

Les dimensions du faisceau sont toujours définies en moyenne quadratique, c'est à dire que les demi-dimensions du faisceau ($\Delta\varphi$, $\Delta W/W$, Δr , Δp_r , Δz , Δp_z) s'expriment en fonction du σ de la distribution:

$$\Delta x = 2 \sigma_x \quad \text{avec} \quad \sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

et les émittances:

$$\epsilon_{xx'} = 4 \left\{ (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2) (\langle x'^2 \rangle - \langle x' \rangle^2) - (\langle x x' \rangle - \langle x \rangle \langle x' \rangle)^2 \right\}^{1/2}$$

Les particules sont injectées à un azimuth donné (le plus fréquemment au centre d'une vallée). Les 6 coordonnées de la particule centrale (W_0 , φ_0 , r_0 , r_0' , z_0 , z_0') et les dimensions du faisceau décorrélés ($\Delta W/W$)_{dc}, $\Delta\varphi$ _{dc}, Δr _{dc}, ϵ_{rdc} , Δz _{dc}, ϵ_{zdc}) sont des données du programme. L'espace à 6 dimensions est rempli avec des particules dont leurs coordonnées sont distribuées dans un ellipsoïde à 6 dimensions, ou bien avec deux tirages séparés dans un ellipsoïde à quatre dimensions pour le plan médian et à deux dimensions pour le plan axial. Ensuite les coordonnées sont centrées par des transformations linéaires et la distribution des particules

corrigée afin d'obtenir une matrice de covariance unitaire, procédé qui assure l'absence de corrélations éventuelles entre les particules.

Les dimensions du paquet sont introduites en accord avec les émittances données à l'injection, puis les corrélations sont établies, dans l'ordre suivant:

$$\begin{cases} \delta W/W = (\delta W/W)_{dc} + C_{W\psi} \delta\psi_{dc} & (a) \\ \delta r = \delta r_{dc} + C_{rr'} \delta r'_{dc} + 1/2 C_{Wr} \delta W/W & (b) \\ \delta\psi = \delta\psi_{dc} - C_{Wr} \delta r'_{dc} & (c) \\ z = z_{dc} + C_{zz'} \delta z'_{dc} & (d) \end{cases} \quad (II.3)$$

II.2.4 Les sorties du programme:

Les sorties numériques concernent l'impression à un azimut donné des coordonnées de la particule centrale et des dimensions du faisceau, ainsi que les projections du faisceau (figures d'émittance dans un plan donné). En général nous échantillonons le faisceau une fois par tour (au centre des vallées par exemple), de façon qu'une oscillation de nombre d'onde ν se traduit par une oscillation du faisceau de période $1/(2|\nu-1|)$ s'il s'agit d'un défaut d'adaptation du faisceau, ou par une oscillation de période $1/|\nu-1|$ s'il s'agit d'un défaut de corrélation du faisceau.

II.3 Introduction de la CE:

II.3.1 Expression programmée:

Les équations programmées⁽¹⁹⁾ correspondent aux expressions [40] et [41] du chapitre I.3.2. Nous avons à calculer l'intégrale:

$$I_x = 32 \int_0^{\infty} \frac{\exp -1/2 \left(\frac{\delta \ell^2}{\sigma_x^2 + t} + \frac{\delta r^2}{\sigma_r^2 + t} + \frac{\delta z^2}{\sigma_z^2 + t} \right)}{(\sigma_x^2 + t) \sqrt{(\sigma_x^2 + t) (\sigma_r^2 + t) (\sigma_z^2 + t)}} dt$$

En effectuant le changement de variable: $t = 1/t' - 1$; cette intégrale devient ($x = r, \ell, \text{ ou } z$):

$$I_x = 32 \int_0^1 \frac{\exp -1/2 \left(\frac{\delta \ell^2}{\sigma_x^2 + 1/t' - 1} + \frac{\delta r^2}{\sigma_r^2 + 1/t' - 1} + \frac{\delta z^2}{\sigma_z^2 + 1/t' - 1} \right)}{(\sigma_x^2 + 1/t' - 1) \sqrt{(\sigma_x^2 + 1/t' - 1) (\sigma_r^2 + 1/t' - 1) (\sigma_z^2 + 1/t' - 1)}} \frac{dt'}{t'^2} \quad (II.4)$$

et est calculée par une méthode de GAUSS à 10 points.

Le calcul suppose la connaissance des positions des particules par rapport au centre de gravité du paquet à un certain instant t_1 et doit s'effectuer dans un repère orthonormé dont les axes coïncident avec les axes principaux de l'ellipsoïde.

II.3.2 Points particuliers concernant le calcul des forces de CE:

II.3.2.1 Application des forces sur les trajectoires des particules:

Il est évident que chaque force agit sur une particule tout le long de sa trajectoire et qu'elle ne demeure pas constante. En toute rigueur il faudrait, pour chaque pas d'intégration, calculer les forces de CE qui modifient la trajectoire de chaque particule. Le temps de calcul résultant deviendrait prohibitif. Pratiquement, il faut choisir un nombre 'raisonnable' de calculs, et prendre la force qui en résulte comme étant constante jusqu'à l'endroit où nous la calculons de nouveau. Ceci revient à assimiler l'effet des forces de CE à l'effet que produit une série de lentilles placées à des endroits 'stratégiques' du cyclotron.

II.3.2.2 Centrage du paquet:

La variable d'intégration utilisée dans le programme est l'azimut, nous avons en fait besoin de connaître les positions des particules par rapport au centre du paquet à un certain temps t_1 .

Supposons que la particule de référence (numérotée 1) soit à l'azimut θ_0 à l'instant t_1 ; une autre particule du paquet atteindra θ_0 à l'instant t_i . Les distances qui séparent ces particules sur les différents axes à l'instant t_i sont (voir figure II.1):

$$\delta \ell_{i-1} = -v_i (t_i - t_1) \quad (\text{II.5 a})$$

$$\delta r_{i-1} = (r_i - r_1) - (p_{r,i} - p_{r,1})(t_i - t_1) v_i \quad (\text{et de même pour } z) \quad (\text{II.5 b})$$

et les distances entre la particule i et le centre de gravité s'expriment:

$$\delta \ell_{i-g} = \delta \ell_{i-1} - \overline{\delta \ell} \quad (\text{II.6}) \quad \text{avec} \quad \overline{\delta \ell} = \frac{1}{N} \sum_1^N \delta \ell_{i-1} \quad (\text{de même pour } \delta r \text{ et } \delta \ell)$$

Le terme $(p_{r,i} - p_{r,1})(t_i - t_1) v_i$ (et de même pour z) est du deuxième ordre et dans la plupart des cas nous le négligerons.

Considérer $\overline{\delta \ell} = \overline{\delta r} = \overline{\delta z} = 0$ revient à placer la particule 1 au centre de gravité du paquet.

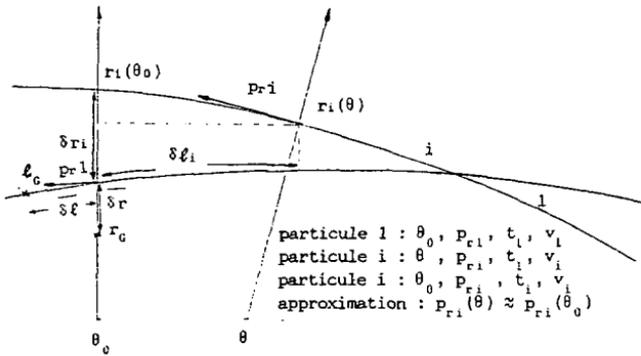


figure II.1

II.3.2.3 Orientation de la projection de l'ellipsoïde à trois dimensions sur le plan médian:

En considérant l'axe \vec{z} comme un axe de symétrie, nous effectuons le changement de repère dans le plan médian. Le calcul des forces doit s'effectuer dans le repère $(\vec{r}^*, \vec{\ell}^*, \vec{z})$, pour un ellipsoïde dont les demi-axes sont $\Delta r^*, \Delta \ell^*, \Delta z$. Si nous n'effectuons pas ce changement, l'erreur proviendra du fait que les forces seront calculées pour un ellipsoïde de demi-axes $\Delta r, \Delta \ell, \Delta z$ et dont les axes principaux sont dirigés selon les axes du repère $(\vec{r}, \vec{\ell}, \vec{z})$ (figure II.2).

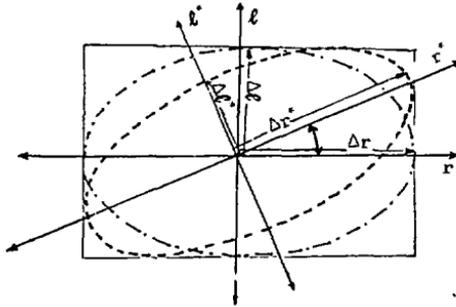
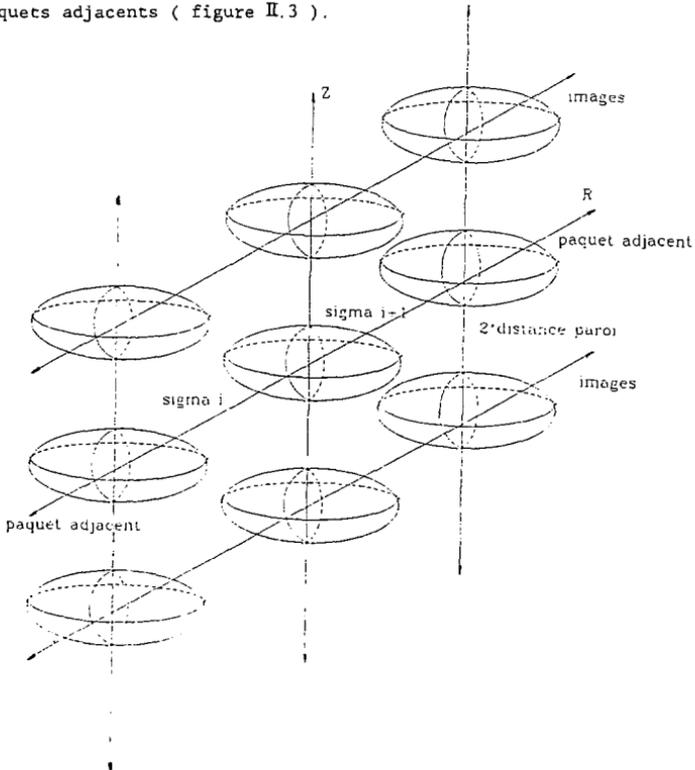


figure II.2

II.3.2.4 Effets produits par les paquets adjacents et les images:

Nous considérons comme étant adjacents les paquets qui se trouvent sur des tours immédiatement voisins et dont la particule de référence est placée au même azimut que celle du paquet que nous traitons. Les paquets qui se trouvent sur le même tour ne seront pas pris en compte car l'harmonique d'accélération n'est pas très élevée (il n'y a pas de paquets très rapprochés). Nous supposons chaque paquet comme étant entouré de deux paquets identiques séparés par le pas de spiralisation dû à l'accélération (le premier et le dernier paquet ont un seul paquet adjacent). Les images seront calculées avec les mêmes approximations: nous évaluerons les effets produits par les images du paquet lui-même et celles des paquets adjacents (figure II.3).



modélisation des paquets adjacents et des images
figure II.3

II.4. Approximations:

Toutes les applications numériques ont été effectuées en injectant 100 particules dans le paquet étudié.

II.4.1 Application des forces sur les trajectoires des particules:

Nous avons choisi dans notre étude de calculer ces forces 8 fois par tour (au centre des aimants et des vallées) ; ceci semble un bon compromis entre le temps de calcul et la justesse des résultats obtenus. En effet, calculer les forces au milieu des vallées et des aimants revient à prendre une sorte de 'moyenne' du faisceau: il est plus gros dans les aimants que dans les vallées. Sur le tableau II.1 nous pouvons apprécier les différences entre les dimensions du paquet à l'éjection selon le type de calcul effectué (le plus gros écart entre A et D est de 15 % dans le cas des émittances $\epsilon_{rr'}$ et $\epsilon_{\varphi w}$).

	$\dot{N} = 2 \cdot 10^{14}$ ions/s	injection		éjection		
				A	B	C
Δr (mm)		5.2	7.5	7.4	6.3	7.9
Δr_{dc} (mm)		3.2	3.7	3.7	3.9	3.4
$\epsilon_{rr'}/\pi$ (mm*mrad)		56.6	29.1	31.0	26.5	34.0
$\epsilon_{rr'_{dc}}/\pi$ (mm*mrad)		35.0	14.6	15.6	17.1	14.7
$\Delta w/w(0/00)$		15.0	8.5	10.3	7.4	9.0
$\Delta \varphi$ (degré)		9.3	3.3	3.1	3.3	3.7
$\Delta \varphi_{dc}$ (degré)		7.5	2.4	2.2	2.7	2.4
$\epsilon_{\varphi w}/w$ (degré*0/00)		138.9	28.1	31.9	23.7	32.7
$\epsilon_{\varphi_{dc}w}$ (degré*0/00)		112.5	20.5	22.8	20.4	21.2
Δz (mm)		3.0	3.2	4.6	3.3	3.3
$\epsilon_{zz'}/\pi$ (mm*mrad)		35.0	14.3	16.5	15.6	14.0

- A- Calcul des forces de CE dans les aimants et les vallées.
- B- Calcul des forces de CE dans les aimants.
- C- Calcul des forces de CE dans les vallées.
- D- Calcul des forces de CE tous les 10 degrés.

tableau II.1

II.4.2 Centrage du paquet:

Si nous centrons le paquet sur la particule de référence, celle-ci ne sera pas affectée par les forces de CE et suivra donc la même trajectoire qu'en absence de CE. En absence de CE l'écart radial entre la position de la particule 1 et le centre de gravité peut être considérable dû à la

forme adoptée par le paquet au fur et à mesure qu'il est accéléré (forme de 'banane'), en présence de CE le paquet tend à devenir rond dans le plan médian et cet écart reste faible.

Sur le tableau II.2 nous avons porté les résultats obtenus pour un faisceau centré et un faisceau non centré, nous constatons que les différences entre les valeurs données restent inférieures à 7%.

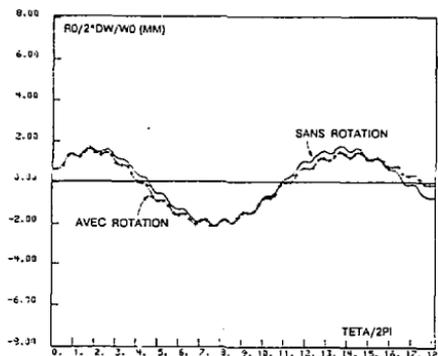
$\dot{N} = 2 \cdot 10^{14}$ ions/s			
	injection	éjection	
		A	E
Δr (mm)	5.2	7.5	8.1
Δr_{dc} (mm)	3.2	3.7	3.8
ϵ_{rr}/π (mm*mrad)	56.6	29.1	31.1
$\epsilon_{rr}/dc/\pi$ (mm*mrad)	35.0	14.6	14.6
$\Delta W/W(0,0)$	15.0	8.5	8.7
$\Delta \varphi$ (degré)	9.3	3.3	3.2
$\Delta \varphi_{dc}$ (degré)	7.5	2.4	2.4
$\epsilon \varphi W/W$ (degré*0/00)	138.9	28.1	27.1
$\epsilon \varphi_{dc} W$ (degré*0/00)	112.5	20.5	20.8
Δz (mm)	3.0	3.2	3.2
ϵ_{zz}/π (mm*mrad)	35.0	14.3	14.4

- A- Calcul des forces de CE 8 fois par tour, centrage du paquet sur la particule 1.
 E- Calcul des forces de CE 8 fois par tour, centrage du paquet sur le centre de gravité.

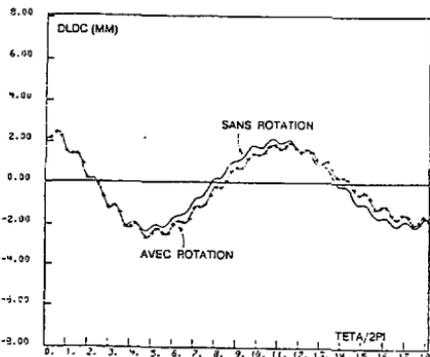
tableau II.2

II.4.3 Orientation de la projection de l'ellipsoïde à trois dimensions sur le plan médian:

La tendance du paquet à devenir rond dans le plan médian atténue cet effet en général. Dans le cas du CSS0 nous pouvons apprécier la faible influence du mode de calcul des forces de CE (en effectuant ou non le changement de repère) sur les oscillations lentes d'une particule. Sur les figures II.4 a b nous avons porté les oscillations des variables $R_0/2 \delta W/W_0$ et ℓ_{dc} dans les deux cas envisagés. Il faut remarquer que ces oscillations lentes sont produites uniquement par les forces de CE présentes tout le long de la trajectoire d'une particule. Dans le cas des figures ci-dessous la différence entre les périodes est approximativement du 5%.



osc. radiales lentes
figure II.4.a



osc. longitudinales lentes
figure II.4.b

Sur le tableau II.3 nous avons porté les résultats issus des deux types de calcul (avec et sans rotation dans le plan médian), les écarts plus grands se trouvent entre les émittances $\epsilon_{rr'}$ et $\epsilon_{\varphi W}$ (14% et 18% resp.).

$\dot{N} = 2 \cdot 10^{14}$ ions/s	injection	éjection
------------------------------------	-----------	----------

		A	F
Δr (mm)	5.2	7.5	8.2
Δr_{dc} (mm)	3.2	3.7	3.7
$\epsilon_{rr'}/\pi$ (mm*mrad)	56.6	29.1	34.1
$\epsilon_{rr' dc}/\pi$ (mm*mrad)	35.0	14.6	15.6
$\Delta W/W(0/00)$	15.0	8.5	9.2
$\Delta \varphi$ (degré)	9.3	3.3	3.8
$\Delta \varphi_{dc}$ (degré)	7.5	2.4	2.8
$\epsilon_{\varphi W}/W$ (degré*0/00)	138.9	28.1	34.6
$\epsilon_{\varphi dc W}$ (degré*0/00)	112.5	20.5	22.9
Δz (mm)	3.0	3.2	3.2
$\epsilon_{zz'}/\pi$ (mm*mrad)	35.0	14.3	13.7

- A Calcul des forces de CE 8 fois par tour,
centrage du paquet sur la particule 1
sans changement de repère dans le plan médian
- F Calcul des forces de CE 8 fois par tour
centrage du paquet sur la particule 1
changement de repère dans le plan médian

tableau II.3

II.4.4 Paquets adjacents et images:

Sur les figures II.5 a b et c nous avons tracé les forces produites par le paquet lui-même, par les paquets adjacents et par les images. Il faut remarquer que les forces radiales produites par les paquets adjacents tendent à s'annuler deux à deux (sauf pour le premier et dernier tour) et que les forces axiales produites par les images tendent aussi à s'annuler deux à deux.

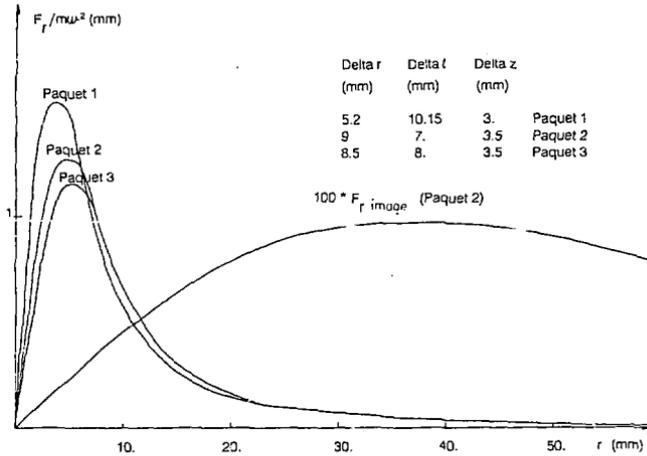


figure II.5.a : forces sur l'axe \vec{r} (pour 3 paquets différents). Le paquet 1 correspond à l'injection dans CSSO, le paquet 2 à un paquet dans une zone intermédiaire, le paquet 3 à l'éjection, ces forces tendent à s'égaliser, les effets qu'elles produisent loin du centre de gravité sont les mêmes (les dimensions du paquet qui produit ces forces n'ont plus d'influence). Nous avons tracé la force produite par une image (en valeur absolue) du paquet 2 sur l'axe \vec{r} ($\ell = 0$ cm, $z = 5$ cm), elle est très faible, même pour le dernier tour où $\sigma \approx 30$ mm. En ce qui concerne les paquets adjacents, si $\sigma/\Delta r \lesssim 2$, alors il peut avoir une faible influence pour le premier et le dernier tour. Dans notre cas ($\sigma_{inj} \approx 80$ mm, $\sigma_{jec} \approx 30$ mm) cela ne se produit pas.

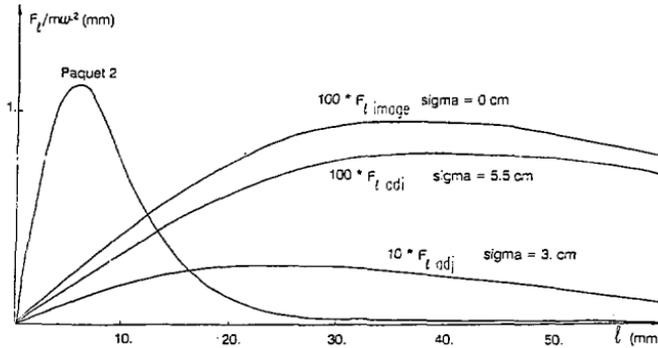


figure II.5.b : force longitudinale produite par le paquet 2 sur l'axe \vec{l} . Pour ce même paquet nous avons tracé les forces produites par un paquet adjacent (situé à $\sigma = 5.5$ cm et 3. cm, $z = 0$. cm) sur l'axe longitudinal et par une image (en valeur absolue; $\sigma = 0$ cm, $z = 5$. cm). La force longitudinale produite par un paquet adjacent d' un paquet situé au dernier tour représente au maximum 2/100 de la force longitudinale produite par les particules du paquet lui-même. La force provenant de l'image est aussi négligeable.

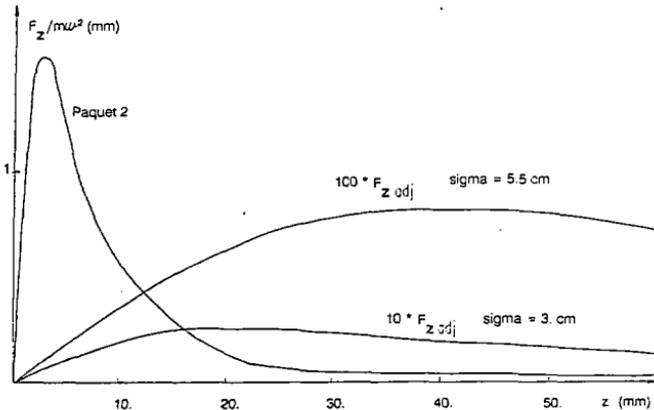


figure II.5.c : force axiale produite par le paquet 2 sur l'axe \vec{z} . Pour ce même paquet nous avons tracé les forces produites par un paquet adjacent (situé à $\sigma = 5.5$ et 3. cm, $z = 0$ cm). La force axiale produite par les paquets adjacents du dernier tour représentent au maximum 1/100 des forces produites par les particules du paquet lui-même.

Ces résultats montrent que nous pouvons négliger dans le cas du CSSO les forces produites par les paquets adjacents et les images.

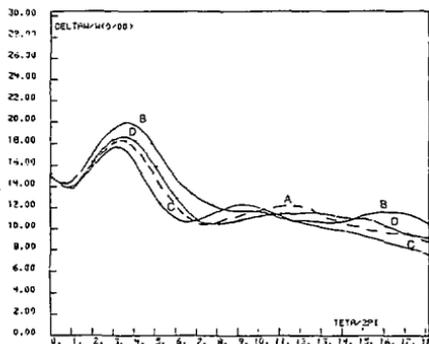
Sur le tableau II.4 nous avons porté les résultats obtenus en tenant compte des effets des paquets adjacents et des images. Les écarts avec un calcul qui ne tient pas compte de ces effets atteignent 10%. Nous avons aussi porté les résultats obtenus à partir d'un calcul complet (les forces étant toujours calculées 8 fois par tour). Les écarts plus significatifs entre les émittances d'un calcul simple (A) et complet atteignent 14%.

$\dot{N} = 2 \cdot 10^{14}$ ions/s	injection		éjection		
		A	G	H	I
Δr (mm)	5.2	7.5	8.0	7.6	7.8
Δr_{dc} (mm)	3.2	3.7	3.7	3.7	3.6
$\epsilon_{rr'}/\pi$ (mm*mrad)	56.6	29.1	31.8	29.8	30.1
$\epsilon_{rr'_{dc}}/\pi$ (mm*mrad)	35.0	14.6	14.6	14.6	14.1
$\Delta W/W(0/00)$	15.0	8.5	9.5	8.7	9.3
$\Delta \varphi$ (degré)	9.3	3.3	3.2	3.3	3.5
$\Delta \varphi_{dc}$ (degré)	7.5	2.4	2.2	2.4	2.8
$\epsilon_{\varphi W/W}$ (degré*0/00)	138.9	28.1	30.1	28.3	31.5
$\epsilon_{\varphi_{dc} W}$ (degré*0/00)	112.5	20.5	20.7	20.5	23.7
Δz (mm)	3.0	3.2	3.2	3.2	3.2
$\epsilon_{zz'}/\pi$ (mm*mrad)	35.0	14.3	14.3	14.3	14.0

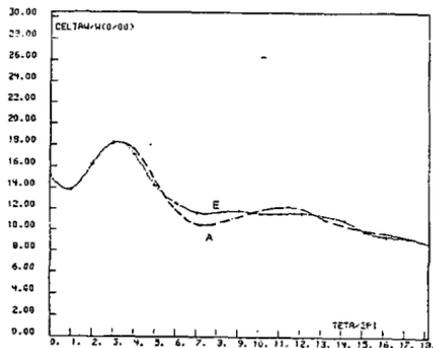
- A- Calcul des forces de CE 8 fois par tour, paquet centré sur la particule 1, sans changement de repère dans le plan médian.
- G- Comme A, avec calcul des effets des paquets adjacents
- H- Comme A, avec calcul des effets des images
- I- Calcul des forces de CE 8 fois par tour, paquet centré sur le centre de gravité, changement de repère dans le plan médian, calcul des effets produits par les paquets adjacents et les images

tableau II.4

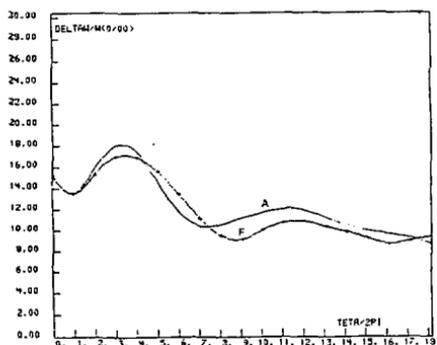
- Figures: Nous avons choisi de représenter l'évolution de la dispersion de l'énergie dans CSSO pendant 18 tours ($\dot{N} = 2 \cdot 10^{14}$ ions/s):



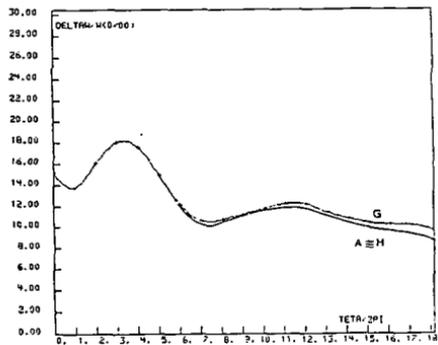
A- Calcul des forces 9 fois par tour
 B- calcul des forces dans les aimants
 C- Calcul des forces dans les vallées
 D- Calcul des forces tous les 10°
 figure II.6.a



A- Paquet centré sur la particule 1
 E- Paquet centré sur le centre de gravité.
 figure II.6.b



A- Calcul sans changement de repère dans le plan médian.
 F- Calcul avec changement de repère dans le plan médian
 figure II.6.c



A- Calcul des forces sans les effets des paquets adjacents et des images
 G- Calcul des effets des paquets adj.
 H- Calcul des effets des images
 figure II.6.d

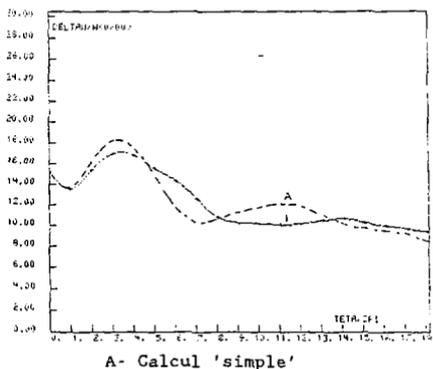


figure II.6.e

Le paquet (ici nous avons représenté seulement l'évolution de la dispersion en énergie) évolue de façon très semblable dans tous les cas envisagés. Les différences entre les valeurs des grandeurs qui caractérisent le faisceau atteignent dans le pire des cas 18%. Nous devons aussi tenir compte des possibles erreurs statistiques provenant du fait d'avoir injecté 100 particules.

Nous étudierons alors les effets de la CE dans CSS0 en calculant les forces 8 fois par tour (milieu des aimants et des vallées), en prenant la particule 1 comme centre du paquet, sans effectuer la rotation qui place l'ellipse représentative du faisceau dans le plan médian dans le repère de ses axes principaux, et sans tenir compte des effets produits par les paquets adjacents et par les images. Nous avons fait de même pour CSS1.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES:

- 1- I. KAPCHINKY and V. VLADIMIRSKY, Limitations of proton beam current in a strong focusing linear accelerator associated with the beam space charge, International Conference on High Energy Accelerators and Instrumentation, CERN, 1959.
- 2- P. LAPOSTOLLE, Quelques propriétés essentielles des effets de la charge d'espace dans les faisceaux continus, CERN /ISR/DI/70-36.
- 3- F. SACHERER, RMS envelope equations with space charge, CERN/SI/int.DL/70-12.
- 4- W. JOHO, High intensity problems in cyclotrons, Proc. 9th. International Conference on Cyclotrons and their Applications, Caen 1981, p. 337.
- 5- E. BARON, R. BECK, M. BOURGAREL, B. BRU, A. CHABERT and C. RICAUD, High intensity and space charge problems at GANIL, Proc. 11th. International Conference on Cyclotrons and their Applications, Tokyo 1986, p. 234.
- 6- M. GORDON, The longitudinal space charge effect and energy resolution, Proc. 5th. International Cyclotron Conference, Oxford 1969, p. 305.
- 7- W. KLEEVEN, Theory of accelerated orbits and space charge effects in an AVF cyclotron., thesis, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, 1988.
- 8- A. CHABERT, T. LUONG and P. PROMÉ, Separate sector cyclotron beam dynamics with space charge. IEEE Vol NS 22 n°3, Juin 1975, p. 1930.
- 9- S. ADAM, W. JOHO, C. KOST, Longitudinal space-charge effects in the SIN Injector II and in the SIN ring cyclotron, Proc. 9th Int. Conf. on Cyclotrons and their Applications, Caen 1981, p. 529

- 10- P. LAPOSTOLLE, Effets de la charge d'espace dans un accélérateur linéaire à protons, CERN AR/Inc. SG/65-15.
- 11- A. CHABERT, J. FERME, G. GENDREAU, P. LAPOSTOLLE and P. YVON, Chromatic correlations at injection and related ejection problems in separated sectors cyclotrons, Particle Accelerator Conference, Accelerator Engineering and Technology, San Francisco 1979, IEEE Vol NS-26 n°3, p. 3612.
- 12- P. LAPOSTOLLE, Recent developments on beam dynamics in cyclotrons and their applications, Proc. 9th. International Conference on Cyclotrons and their Applications, Caen 1981, p. 317.
- 13- A. CHABERT, G. GENDREAU and P. LAPOSTOLLE, Limited energy spread in a SSC, 8th International Conference on Cyclotron and their Applications, Bloomington, Indiana 1978, IEEE Vol NS-26 n°2, p. 2306.
- 14- SIN, Rapport interne, Der neue Injektor für die SIN Beschleunigeranlage, Dezember 1973.
- 15- A. CHABERT and G. GENDREAU, GANIL 'Haute intensité', rapport interne.
- 16- A. CHABERT and G. GENDREAU, Paramètres de base d'un CSSO, rapport interne.
- 17- A. CHABERT, G. GENDREAU and V. CAZOLL, Orbites d'équilibre dans un cyclotron à quatre secteurs séparés, GANIL A 87.02, Juin 1987.
- 18- GROUPE THEORIE ET PARAMETRES du GANIL: Les programmes ANJO, JOAN, NAJO, GANIL 80R/132/TP/06, Octobre 1980.
- 19- M. PROMÉ, Effets de la charge d'espace dans les accélérateurs linéaires à protons, thèse, Université d'Orsay, Avril 1971.
- 20- I. HOFMANN, J. STRUCKMEIER, Generalized three-dimensional equations for the emittance and field energy of high-current beams in periodic focusing structures, Particle Accelerators, 1987, Vol. 21, p. 69.

TABLE DES MATIERES:

REMERCIEMENTS	2
INTRODUCTION	3
I. <u>DETERMINATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT</u>	
I.1 LE MODELE UTILISE	4
I.1.1 Le champ accélérateur utilisé	4
I.1.2 Les termes du premier ordre	4
I.2 EQUATIONS DU MOUVEMENT D'UNE PARTICULE QUELCONQUE	6
I.2.1 Changement de référentiel	6
I.2.2 Les forces agissant sur un ion dans le repère mobile	7
I.2.3 Développement des équations au premier ordre	8
I.2.4 Intégrale du mouvement	11
I.3 EXPRESSION DES FORCES DE CHARGE D'ESPACE DANS UN ELLIPSOIDE	12
I.3.1 Ellipsoïde de révolution uniformément chargé	12
I.3.2 Ellipsoïde avec une distribution gaussienne	13
I.3.3 Comparaison des deux distributions	14
II. <u>ETUDE THEORIQUE DES EQUATIONS DU MOUVEMENT</u>	
II.1 ETUDE THEORIQUE DU MOUVEMENT AXIAL	16
II.2 ETUDE THEORIQUE DU MOUVEMENT DANS LE PLAN MEDIAN	17
II.2.1 Etude du mouvement en absence d'accélération	17
II.2.1.1 Sans effet de charge d'espace	17
II.2.1.2 Avec effet de charge d'espace	20
II.2.2 Etude du mouvement avec accélération	25
II.2.2.1 Sans effet de charge d'espace	25
II.2.2.2 Avec effet de charge d'espace	26

III.	<u>ETUDE COMPARATIVE ENTRE LA THEORIE ET LA SIMULATION</u>	
III.1	CONDITIONS DE CETTE ETUDE	28
	III.1.1 Caractéristiques de CSS1	28
	III.1.2 Caractéristiques du faisceau injecté	29
III.2	LE MOUVEMENT AXIAL	30
	III.2.1 En absence d'accélération	30
	III.2.2 Avec accélération	32
III.3	LE MOUVEMENT DANS LE PLAN MEDIAN	33
	III.3.1 En absence d'accélération	33
	III.3.2 Avec accélération	42
IV.	<u>APPLICATION A UN INJECTEUR 'HAUTE INTENSITE'</u>	
IV.1	DESCRIPTION SOMMAIRE DU CYCLOTRON A SECTEURS SEPERES CSSO	52
	IV.1.1 Intérêt d'un nouvel injecteur	52
	IV.1.2 Paramètres de base d'un CSSO	53
	IV.1.3 La particule centrale	54
	IV.1.4 Caractéristiques du faisceau injecté	55
IV.2	TRANSMISSION DE FAISCEAU EN REGIME DE CHARGE D'ESPACE	55
	IV.2.1 Approche théorique. Limite d'intensité pour CSSO	55
	IV.2.2 Résultats de la simulation	56
	IV.2.3 Conclusion	61
IV.3	ESSAIS DE COMPENSATION DE LA CHARGE D'ESPACE	61
	IV.3.1 Considérations théoriques	61
	IV.3.2 Accélération sur le flanc	62
	IV.3.3 Accélération avec un plateau de champ	65
	IV.3.4 Conclusion	65
	CONCLUSION	66

ANNEXE I

I.1	Résolution des équations du mouvement sans accélération et avec charge d'espace	68
I.2	Résolution des équations du mouvement avec accélération et charge d'espace	69
I.3	Validité de l'approximation $Kx_0 + R_0 = Cst$	71

ANNEXE II

II.1	Le programme de simulation NAJO	73
II.2	Description sommaire de NAJO	73
II.2.1	Traitement du champ magnétique	73
II.2.2	Traitement du passage par un intervalle d'accélération	74
II.2.3	L'injection des particules	74
II.2.4	Les sorties du programme	75
II.3	Introduction de la charge d'espace	75
II.3.1	Expression programmée	75
II.3.2	Points particuliers concernant le calcul des forces de charge d'espace	76
II.3.2.1	Application des forces sur les trajectoires des particules	76
II.3.2.2	Centrage du paquet	76
II.3.2.3	Orientation de la projection de l'ellipsoïde à trois dimensions sur le plan médian	77
II.3.2.4	Effets produits par les paquets adjacents et les images	78
II.4	Approximations	79
II.4.1	Application des forces sur les trajectoires des particules	79
II.4.2	Centrage du paquet	79
II.4.3	Orientation de la projection de l'ellipsoïde à trois dimensions sur le plan médian	80
II.4.4	Effets produits par les paquets adjacents et les images	82
	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	88

LISTE DES ILLUSTRATIONS :

<u>figure 1</u>	: coordonnées d'une particule M dans un repère en rotation avec la vitesse angulaire ω .	6
<u>figure 2</u>	: fonction $g(\xi)$	12
<u>figure 3</u>	: forces de CE dans le cas d'un ellipsoïde uniformément chargé et dans le cas d'un ellipsoïde avec une distribution uniforme	14
<u>figure 4</u>	: oscillations radiales d'une particule en absence d'accélération et CE	18
<u>figure 5</u>	: corrélation $r'-\delta\varphi$ et mouvement $r-\delta\varphi$ pour une particule en absence d'accélération et CE	19
<u>figure 6</u>	: a- adaptation $r'-r$ ou $z'-z$ b- corrélation $r'-\delta\varphi$ c- corrélation $r-\delta W$ (en absence d'accélération et de CE)	20
<u>figure 7</u>	: a- ellipse $\delta W / \delta\varphi_{dc}$ et ellipses $r_{dc} / (\delta\varphi - \delta\varphi_{dc})$ b- ellipse $r_{oc} / (\delta\varphi - \delta\varphi_{dc})$ c- corrélation $\delta\psi-r'$ (en absence d'accélération et avec CE)	24
<u>figure 8</u>	: modélisation d'un cyclotron à secteurs séparés (cas du CSS1)	28
<u>figure 9</u>	: W_0 , R_0 et σ pour la particule centrale dans CSS1	29
<u>figure 10</u>	: a- oscillations axiales pour 3 tours non accélérés pour $0,10^{15}$ et $2 \cdot 10^{15}$ ions/s. b- oscillations axiales, 45 tours non accélérés pour 10^{15} ions/s	31
<u>figure 11</u>	: variations de v_z avec l'intensité	31
<u>figure 12</u>	: dimension axiale du faisceau pour $0, 2,5 \cdot 10^{14}, 10^{15}$ et $2 \cdot 10^{15}$ ions/s (sans accélération)	32
<u>figure 13</u>	: variations de v_z avec le rayon pour 0 et 10^{15} ions/s (avec accélération)	33
<u>figure 14</u>	: variations de ϵ_z avec le nombre de tours pour 0 et 10^{15} ions/s (avec et sans accélération)	33
<u>figure 15</u>	: oscillations radiales d'une particule non accélérée : a- 0 ions/s, b- $2,5 \cdot 10^{14}$ ions/s, c- 10^{15} ions/s	34
<u>figure 16</u>	: oscillations longitudinales d'une particule non accélérée : a- 0 ions/s, b- $2,5 \cdot 10^{14}$ ions/s, c- 10^{15} ions/s	34
<u>figure 17</u>	: variations de v_{r1} et v_{r2} avec l'intensité	35
<u>figure 18</u>	: a- corrélation $r'-\delta\varphi$ et ellipse $r/\delta\varphi$ pour 0 ions/s b- corrélation $r'-\delta\varphi$ pour 10^{15} ions/s	36
<u>figure 19</u>	: a- 'ellipse' $\delta\epsilon_{dc}/\delta W$ pour $2,5 \cdot 10^{14}$ ions/s b- 'ellipse' $\delta\epsilon_{dc}/\delta W$ pour 10^{15} ions/s (pour une particule non accélérée)	37

- figure 20 : a- 'ellipse' ($\delta l - \delta l_{dc}$)/rdc pour $2.5 \cdot 10^{14}$ ions/s
 b- 'ellipse' ($\delta l - \delta l_{dc}$)/rdc pour 10^{15} ions/s
 (pour une particule non accélérée) 37
- figure 21 : évolution de: a- Δr , b- Δr_{dc} , c- $R_0/2 * \Delta W/W_0$, d- ϵr_i ,
 e- ϵr_{fdc} , f- Δl , g- Δl_{dc} , h- $\Delta \phi$, i- $\Delta \phi_{dc}$, j- $\epsilon \psi$,
 k- $\epsilon \psi_{dc}$, pour 0, $2.5 \cdot 10^{14}$, $5 \cdot 10^{14}$, 10^{15} ,
 $2 \cdot 10^{15}$ ions/s, sans accélération 38-39
- figure 22 : ϵr_l (sans accélération) :
 a- à l'injection
 b, c- 21^{ème} tour pour 0 et 10^{15} ions/s
 d, e- 41^{ème} tour pour 0 et 10^{15} ions/s 40
- figure 23 : évolution d'un faisceau 'rond' dans le plan médian
 a- Δr , b- ΔW , c- Δl , d- Δz , (sans accélération et
 pour $6.65 \cdot 10^{14}$ ions/s) 41-42
- figure 24 : oscillations radiales d'une particule accélérée
 a- 0 ions/s, b- $2.5 \cdot 10^{14}$ ions/s, c- 10^{15} ions/s 43
- figure 25 : oscillations longitudinales pour une particule accélérée
 a- 0 ions/s, b- $2.5 \cdot 10^{14}$ ions/s, c- 10^{15} ions/s 43
- figure 26 : oscillations de la déviation en énergie d'une particule
 accélérée
 a- 0 ions/s, b- $2.5 \cdot 10^{14}$ ions/s , c- 10^{15} ions/s 44
- figure 27 : oscillations de la phase d'une particule accélérée
 a- 0 ions/s, b- $2.5 \cdot 10^{14}$ ions/s, c- 10^{15} ions/s 44
- figure 28 : corrélations d'une particule accélérée :
 a- corrélation $r'' - \delta \phi$ et 'ellipse' $r - \delta \phi$ pour 0 ions/s
 b- corrélation $r'' - \delta \phi$ pour 10^{15} ions/s 45
- figure 29 : 'ellipse' $\delta l_{dc}/\delta W$ (particule accélérée) pour :
 a- $2.5 \cdot 10^{14}$ ions/s , b- 10^{15} ions/s 46
- figure 30 : 'ellipse' ($\delta l - \delta l_{dc}$)/rdc (particule accélérée) pour :
 a- $2.5 \cdot 10^{14}$ ions/s, b- 10^{15} ions/s 46
- figure 31 : évolution de: a- Δr , b- Δr_{dc} , c- $R_0/2 * \Delta W/W_0$, d- ϵr_r ,
 e- ϵr_{fdc} , f- Δl , g- Δl_{dc} , h- $\Delta \phi$, i- $\Delta \phi_{dc}$, j- $\epsilon \psi$,
 k- $\epsilon \psi_{dc}$, pour 0, $2.5 \cdot 10^{14}$, $5 \cdot 10^{14}$, 10^{15} , $2 \cdot 10^{15}$ ions/s
 avec accélération 47-48
- figure 32 : ϵr_l et $\epsilon \psi$ (avec accélération)
 a et b - remplissage initial
 c et d - au 61^{ème} tour pour 0 ions/s
 e et f - au 61^{ème} tour pour 10^{15} ions/s 49
- figure 33 : $\epsilon \psi$ pour 10^{15} ions/s
 a- 5^{ème} tour , b- 10^{ème} tour , 15^{ème} tour , 20^{ème} tour 50
- figure 34 : schéma du GANIL actuel 52

<u>figure 35</u> : Wc , R_0 , \varnothing (particule centrale, CSSO)	54
<u>figure 36</u> : pr_0 , φ_0 (particule centrale, CSSO, axe des cavités)	54
<u>figure 37</u> : forces de CE pour CSSO (gaussiennes et linéaires)	56
<u>figure 38</u> : nombres d'onde en fonction de l'intensité (CSSO)	56
<u>figure 39</u> : évolution de: a- Δr , b- Δr_{dc} , c- $R_0/2 * \Delta W/W_0$, d- $\Delta W/W$, e- $\epsilon r_{\dot{r}}$, f- $\epsilon r_{\dot{r}dc}$, g- $\Delta \ell$, h- $\Delta \ell_{dc}$, i- $\Delta \varphi$, j- $\Delta \varphi_{dc}$, k- $\epsilon \varphi_W$, l- $\epsilon \varphi_{dcW}$, m- Δz , n- $\epsilon z z$, pour 0, 0.5 10^{14} , 2. 10^{14} , 5. 10^{14} , 10^{15} ions/s, CSSO avec accélération	57-59
<u>figure 40</u> : $\epsilon r_{\dot{r}}$ et $\epsilon W \varphi$ (CSSO avec accélération) a et b - remplissage initial c et d - au 61 ^{ème} tour pour 0 ions/s e et f - au 61 ^{ème} tour pour 5. 10^{14} ions/s	60
<u>figure 41</u> : loi pour la phase φ_0 (simulée et théorique)	63
<u>figure 42</u> : mouvement compensé et non compensé pour 10^{14} ions/s : a- osc. radiales lentes, b- osc. longitudinales lentes	64
<u>figure 43</u> : $\epsilon \varphi_W$ et $\epsilon r_{\dot{r}}$ à l'éjection, 10^{14} ions/s, accélération sur le flanc	64
<u>figure I.1 a</u> : variations de Kz_0R_0 , Kr_0R_0 , $K\ell_0R_0$ (mouv. non accéléré)	71
<u>figure I.1 b</u> : variations de Kz_0R_0 , Kr_0R_0 , $K\ell_0R_0$ (mouvement accéléré)	72
<u>figure II.1</u> : centrage du paquet	77
<u>figure II.2</u> : orientation de la projection de l'ellipsoïde à trois dimensions sur le plan médian	77
<u>figure II.3</u> : modélisation des paquets adjacents et des images	78
<u>figure II.4</u> : a- osc. radiales lentes (avec et sans rotation) b- osc. longitudinales lentes (avec et sans rotation)	81
<u>figure II.5</u> : a- forces sur l'axe \vec{r} b- forces longitudinales c- forces axiales	82-83
<u>figure II.6</u> : évolution de la dispersion de l'énergie dans CSSO pour 2. 10^{14} ions/s: a- cas A, B, C, D ; b- cas A et E; c- cas A et F ; d- cas A, G, H ; e- cas A et I	85-86

Depuis une dizaine d'années, le désir d'obtenir des faisceaux d'ions intenses à partir de cyclotrons a conduit à amplifier les efforts concernant l'étude des effets de la charge d'espace dans ces machines. Les effets de la charge d'espace dans un cyclotron sont intimement liés à deux caractéristiques spécifiques de ce type d'accélérateur :

- le faisceau est constitué d'une suite de paquets dont les dimensions transversales et longitudinales sont du même ordre,
- les mouvements radial et longitudinal sont fortement couplés.

Le modèle présenté dans cette thèse permet d'expliquer certains des effets produits par la charge d'espace. Il décrit le mouvement d'un ion appartenant à un paquet et soumis aux forces du champ de guidage, du champ accélérateur du cyclotron et du champ de charge d'espace créé par les autres particules du paquet. Les solutions des équations différentielles développées au premier ordre décrivent les petits mouvements des ions autour d'une particule de référence et sont valables au voisinage du centre du paquet, là où les forces de charge d'espace sont considérées comme étant linéaires. Les résultats donnés par ce modèle sont comparés à ceux obtenus à partir d'un programme de simulation déjà utilisé avec succès lors de l'étude des cyclotrons à secteurs séparés du Grand Accélérateur National d'Ions Lourds : l'accord est excellent. L'évolution de l'ensemble du faisceau est aussi étudiée avec ce programme qui tient compte des effets non linéaires des forces de charge d'espace et de tous les couplages. Les résultats obtenus lors de l'étude numérique d'un nouvel injecteur pour les cyclotrons du Grand Accélérateur National d'Ions Lourds montrent qu'il serait possible d'obtenir une très forte augmentation de l'intensité des faisceaux.

During the last decade, the need of high ion beam intensities urged the cyclotron laboratories to amplify the efforts to study the space charge effects in these machines. The cyclotron space charge effects are intimately linked to two specific features of this kind of accelerator ;

- *the beam is formed of a succession of bunches having about the same size for transverse and longitudinal dimensions,*
- *the radial and longitudinal motions are strongly coupled.*

The analytical model developed in this thesis explains some effects produced by the space charge forces. It describes the motion of an ion contained in a bunch. This ion moves under the effects of the guiding field forces, the accelerator cyclotron field forces and the space charge forces created by the others particles of the bunch. The solutions of the first order differential equations describe the small motion around one particle, which is taken as a reference particle. These solutions are valid in the vicinity of the bunch center, where the space charge forces are considered linear. The results of the model are compared with those obtained from a multiparticle code. This code has been already used successfully at GANIL (the Great National Heavy Ions Accelerator). The evolution of the whole beam has also been studied with this code, which takes into account the non linear space charge effects and all the couplings. The results obtained by the numerical study of a proposed new injector for the cyclotrons of GANIL shows that it is possible to obtain an important increase of the beam intensity.

MOTS CLES :

cyclotron
charge d'espace
programme multiparticules.



89 08 07
AD 90 12
CAL 800