



**HAL**  
open science

# Etude de la mesure des emittances transverses d'un faisceau par la methode des gradients. Application au cas d'une focalisation par solenoide

S. M'Garrech

► **To cite this version:**

S. M'Garrech. Etude de la mesure des emittances transverses d'un faisceau par la methode des gradients. Application au cas d'une focalisation par solenoide. 2002, pp.28. in2p3-00019973

**HAL Id: in2p3-00019973**

<https://in2p3.hal.science/in2p3-00019973v1>

Submitted on 3 Dec 2002

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **Etude de la mesure des émittances transverses d'un faisceau par la méthode des gradients. Application au cas d'une focalisation par solénoïde**

M'Garrech Slah

CNRS-IN2P3 / Université Paris-Sud  
IPNO - 15 Rue G. Clemenceau 91406 Orsay Cedex

---

## **Summary**

Within the framework of the ALTO project (Linear Accelerator near the Orsay Tandem), IPNO will recover the LAL station NEPAL, which will be used as the ALTO injecting system. To calculate the beam optics through the linear accelerator, it is necessary to determine the electron beam emittance at the exit of the buncher station.

There are several methods to determine this emittance : direct methods, like the Pepper Pot technique, and indirect ones, like the three distances method and the three gradients one. The latter requires a variable optic element (quadrupole, solenoid...).

In the case of the use of a solenoid, the horizontal and vertical motions are coupled, which implies an additional difficulty for the analysis of the measurements. The main goal of this report is to identify and to solve these mathematical difficulties, so as to determine at last the initial emittance.

The treated example comes from a paper by R. Chehab et al. [12], the code used is BETA, and resolution is done using the least square method.

The remarks and the results obtained will be used for the measurement of the NEPAL emittance value at the LAL.

---



# Sommaire

A) Rappels de théorie de la dynamique des particules	3
I) Espace des phases - Emittance	3
II) Matrice de transfert	5
III) Matrice faisceau	10
IV) Transport des ellipses d'émittance	10
B) Mesure de l'émittance	12
V) Méthode des trois distances	12
VI) Méthode des trois gradients	12
VI-1) Méthode des trois gradients ( cas d'un système ou les mouvements H et V sont découplés)	13
VI-2) Méthode des trois gradients ( cas d'un système couplé)	13
VI-2-1) Le cas d'un faisceau rond (à symétrie de révolution)	15
VI-2-2) Le cas d'un faisceau non rond	16
VI-2-2-1) Mesure dans un seul plan	16
VI-2-2-2) Mesure dans deux plans perpendiculaires et en même position	17
VI-2-2-3) Mesure dans deux plans perpendiculaires et en deux positions distincts	18
VII) Conclusion	20
Références	21
Annexe 1	22
Annexe 2	23
Annexe 3	24
Annexe 4	26
Annexe 5	27

# Etude de la mesure des émittances transverses d'un faisceau par la méthode des gradients. Application au cas d'une focalisation par solénoïde

L'émittance transverse du faisceau d'électrons à la sortie du groupeur est un des paramètres importants devant être déterminé pour permettre le calcul de l'optique de l'accélérateur linéaire utilisé pour le projet ALTO [1].

Plusieurs méthodes peuvent être employées pour la mesure expérimentale de l'émittance d'un faisceau. Une méthode directe consiste à mesurer la divergence angulaire des particules en plusieurs positions transverses à l'aide d'un échantillonneur percé de fentes ou de trous placés en amont d'un mesureur de profil. Cette méthode existe déjà sur le projet SILHI [2] (Source d'Ions Légers Haute Intensité).

On peut également de manière indirecte, déterminer l'émittance d'un faisceau en exploitant les mesures de ses dimensions transverses (profils) en plusieurs positions pour une optique fixe (méthode des 3 distances) ou en une seule position avec une optique variable (méthode des 3 gradients). Dans notre cas, c'est cette seconde technique qui nous avons choisie et l'élément variable permettant de modifier les dimensions du faisceau au droit du capteur sera un solénoïde.

## A) Rappels de théorie de la dynamique des particules

Le but de ce paragraphe est de rappeler les notions essentielles de physique des faisceaux qui seront utilisées par la suite pour les calculs qui vont être présentés.

### D) Espaces de phases - Emittance

D'après la relation fondamentale de la dynamique définit la dynamique d'une particule :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m_0 \left( \frac{d(\gamma \frac{d\vec{r}}{dt})}{dt} \right) = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

$\vec{p}$  est la quantité de mouvement de la particule,  
 $\gamma$  est son énergie normalisée,  
 $m_0$  est sa masse au repos,  
 $\vec{F}$  est la résultante des forces s'exerçant sur la particule,  
 $\vec{r}$  et  $\vec{v}$  sont respectivement le vecteur position et le vecteur vitesse de la particule dans un espace de 3D à l'instant  $t$ ,

On peut écrire l'équation différentielle du second ordre en  $r$  en deux équations différentielles du premier ordre sur les valeurs  $p$  et  $r$ .

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{p}}{\gamma m_0} \end{cases}$$

Les variables  $r$  et  $p$  sont les variables privilégiées pour écrire l'évolution de l'état d'une particule dans le temps. Donc un espace de 6D, 3 dimensions pour les positions et 3 pour les impulsions, représente à la fois l'état actuel du faisceau et sa dynamique via la connaissance du champ de force. Cet espace est appelé **espace des phases**.

La degré de liberté d'espace des phases dépend de la nature de mouvement transverse et longitudinal de la particule dans la ligne accélérateur. Si ces deux mouvements sont découplés on a coutume de représenter la dynamique transverse du faisceau dans l'espace de phase transverse 4D  $(x, p_x, z, p_z)$  ou  $(x, x', z, z')$ . Si la dynamique transverse suivant l'axe  $x$  est découplée de celle suivant l'axe  $z$ , on représente le faisceau dans l'espace des phases 2D  $(x, x')$

*Dans les espaces de phase  $(x, x')$  et  $(z, z')$ , on appelle émittance transverses géométrique  $\epsilon_x, \epsilon_z$  les surfaces divisées par  $\pi$  occupées par l'ensemble des points représentatifs des particules du faisceau.*

Du fait du mouvement de ces points en théorie linéaire, on a coutume de borner ces surfaces par un contour elliptique. On parle alors d'ellipse de phase dont la surface vaut  $S = \pi \epsilon$  est exprimée en m.rad mais souvent on rencontre le sous-multiple mm.mrad [3] [4].

Dans l'espace de phase, la dynamique des particules obéit à une loi de conservation appelée théorème de Liouville [3]. Dans sa forme générale elle s'écrit  $\int p dq = cte$  avec  $p = m_0 c \beta \gamma'$  et  $q = y$  on en déduit donc :

$$\oint p dq = cte = m_0 c \beta \gamma' \oint y' dy = m_0 c \beta \gamma' \pi \epsilon = p_0 c \pi \epsilon \quad (I-1)$$

La quantité  $\beta \gamma \epsilon$  appelée émittance normalisée  $\epsilon_N$  [5], reste constante le long de l'axe de propagation, donc cette émittance doit être égale en théorie à l'émittance normalisée  $\epsilon_{N,nd}$  de la source que l'on appelle émittance native ou intrinsèque [6]. Alors que l'émittance géométrique  $\epsilon$  n'est invariante qu'en l'absence d'accélération (énergie constante).

$$\epsilon_{N,nd} = 2r_c (2KT/m_0 c^2)^{1/2}$$

La valeur d'émittance  $\epsilon_{N,nd}$  représente en réalité la limite théorique inférieure de l'émittance normalisée [7]. Dans la pratique, les instabilités, la non-linéarité des champs et d'autres effets causent une augmentation d'émittance de sorte que sa valeur réelle est toujours plus grande que  $\epsilon_{N,nd}$ .

On utilise aussi les notions d'émittances RMS introduites entre autres par P. Lapostolle et définies par :

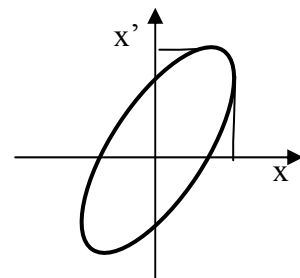
$$\epsilon_{RMS} = (\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle x x' \rangle^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad \epsilon_{N,RMS} = \beta \gamma \epsilon_{RMS}$$

avec  $\langle u \rangle$  représente la moyenne de grandeur  $u$  sur l'ensemble des particules du faisceau (moments d'ordre 2).

L'émittance RMS est utile pour caractériser l'évolution de l'émittance d'un faisceau dans des champs non linéaire ou lorsque les particules interagissent entre elles (forces de charge d'espace)

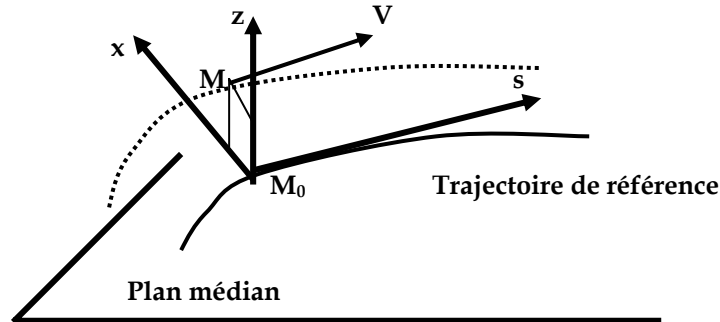
### Remarque

Dans les cas de distributions gaussiennes en projection sur les axes, l'émittance RMS renferme 39.3% des particules du faisceau. La surface égale à 4 fois la surface RMS en contient 87% [8].



## II) Matrice de transfert

Une particule réelle dans une structure optique, effectue des oscillations (transversales et longitudinales) autour de la trajectoire de référence. Afin de déterminer la théorie des ses petits mouvements, il est commode de décrire l'équation de mouvement dans un repère de référence mobile.



*Figure II-1 : Repère de référence*

Comme le montre la figure II-1, le repère choisi est le trièdre  $(x,s,z)$ , attaché à l'orbite de référence au point  $M_0$ , projection de la particule  $M$  sur l'orbite. L'axe  $s$  est dirigé suivant la tangente à l'orbite de référence, dans le sens du mouvement. L'axe  $z$  est perpendiculaire au plan médian (le plan où se déplace la particule de référence) et l'axe  $x$  est dirigé suivant la normale de l'orbite de référence et il est donc dans le plan médian.

Dans le cas où le système possède un plan d'anti-symétrie, l'équation du mouvement  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$  devient au premier ordre dans le repère de référence  $(x,s,z)$  [3][9] :

$$y'' + K(s)y = D \quad (\text{II-1})$$

Avec

$$\begin{cases} K_x = (1-n)/\rho^2 \text{ et } D = \delta/\rho & \text{pour } y \equiv x \\ K_z = n/\rho^2 \text{ et } D = 0 & \text{pour } y \equiv z \end{cases}$$

$n$ ,  $\rho$  respectivement l'indice et le rayon de courbure du système optique et  $\delta = \Delta P/P_0$  l'écart en impulsion par rapport à la trajectoire qui décrit la trajectoire de référence.

**Exemple :** dans une section sans champ  $n=0$  et  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $K_x=0$  et  $K_z=0$

La solution générale de l'équation différentielle (II-1) est de la forme :

$$y(s) = y_0 C(s) + y'_0 S(s) + y_{ap}(s)$$

$y_0$  et  $y'_0$  sont deux constantes, égales aux conditions initiales en  $s=s_0$ .

$C(s)$  et  $S(s)$  sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène (II-1) dont le Wronskien  $W(C,S)$  [10] vérifie :

$$W = \begin{vmatrix} C & S \\ C' & S' \end{vmatrix} \neq 0$$

La dérivation du Wronskien  $W$ , conduit à :

$$\frac{dW}{ds} = \frac{d(CS' - SC')}{ds} = CS'' - SC'' = -K(s)(CS - SC) = 0$$

La valeur de  $W$  dépend des conditions initiales en  $s=s_0$ , si nous choisissons  $C_0=1$ ,  $C'_0=0$ ,  $S_0=0$  et  $S'_0=1$ , les solutions satisfaisant ces conditions initiales s'appellent le pseudo cosinus et le pseudo sinus et ont comme conséquence  $W=1$ .

Pour compléter la formule de  $y(s)$ , il suffit de compléter maintenant  $y_p(s)$ . Pour cela on pose  $y_p(s)=A(s)y_1(s)+B(s)y_2(s)$  où on impose la condition suivante à  $A$  et  $B$ ,  $A'(s)y_1+B'(s)y_2=0$  donc :

$$y''_p + K(s)y_p = A'y'_1 + B'y'_2 + Ay''_1 + B''y''_2 + K(s)[Ay_1 + By_2]$$

or  $y_1$  et  $y_2$  sont deux solutions de l'équation homogène, donc il reste :

$$A'y'_1 + B'y'_2 = D$$

$$A'y_1 + B'y_2 = 0$$

D'après ces deux équations on en déduit  $A' = -y_2 D / W$  et  $B' = y_1 D / W$

D'ou pour  $y=z$ ,  $y_p=0$

$$y=x, \quad y_p = \delta D_x(s) \quad \text{avec} \quad D_x = [S_x(s) \int_0^s \frac{C(s)ds}{\rho} - C_x(s) \int_0^s \frac{S(s)ds}{\rho}]$$

Donc on a:

$$\begin{cases} x(s) = x_0 C_x(s) + x'_0 S_x(s) + D_x(s) \delta \\ x'(s) = x_0 C'_x(s) + x'_0 S'_x(s) + D'_x(s) \delta \\ z(s) = z_0 C_x(s) + z'_0 S_x(s) \\ z'(s) = z_0 C'_x(s) + z'_0 S'_x(s) \end{cases}$$

Les éléments optiques possédant un plan d'anti-symétrie (dipôle, quadripôle) sont caractérisés par une matrice de transfert  $T$ , qui permet de calculer les valeurs  $x$ ,  $x'$ ,  $\delta$ ,  $z$  et  $z'$  en fonction  $x_0$ ,  $x'_0$ ,  $\delta$ ,  $z_0$  et  $z'_0$  ou  $x$ ,  $x'$ ,  $\delta$ ,  $z$  et  $z'$  représentent les conditions des particules considérées en  $s$ .

$x$  : représente la position de la particule

$x'$  : la pente

$\delta$  : l'écart en impulsion par rapport à la référence

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ \delta(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x(s) S_x(s) D_x(s) \\ C'_x(s) S'_x(s) D'_x(s) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \\ \delta \end{pmatrix} = T_x \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z(s) \\ z'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_z(s) S_z(s) \\ C'_z(s) S'_z(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = T_z \begin{pmatrix} z(0) \\ z'(0) \end{pmatrix}$$

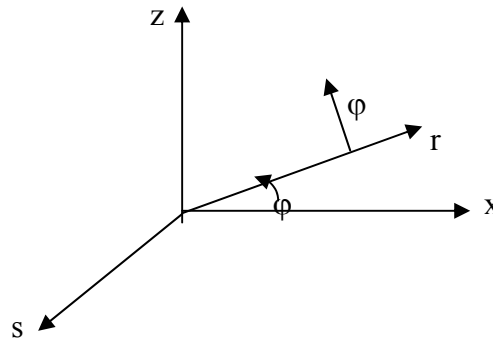
$C_y$ ,  $S_y$  et  $D_y$  ( $y=x$  ou  $z$ ) sont appelées trajectoires principales. La fonction  $D_x$  caractérise les propriétés chromatiques du système optique, on l'appelle encore fonction de dispersion.

## Exemple : Matrice de transfert du solénoïde

Tout d'abord le solénoïde est un système optique ne possédant pas un plan d'anti-symétrie, les deux mouvements horizontal et vertical sont couplés. Dans un solénoïde nous constatons trois régions, l'entrée, la zone centrale et la sortie. Donc pour un solénoïde idéal la matrice de transfert est :

$$\mathbf{M}_{\text{total}} = \mathbf{M}_{\text{sortie}} \mathbf{M}_{\text{centre}} \mathbf{M}_{\text{entrée}}$$

### a) Matrice de transfert du solénoïde dans la zone centrale :



D'après la quatrième équation de Maxwell on a :

$$\vec{J} = j_{\varphi} \vec{\varphi}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$$

donc :

$$\left\| \begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_{\varphi}}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_s}{\partial r \partial s} - \frac{\partial^2 A_s}{\partial s^2} = 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{II-2})$$

$$\left\| \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial s} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial s} - \frac{\partial^2 A_s}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_s}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_{\varphi}}{\partial \varphi \partial s} = 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{II-3})$$

Dans le cas d'un système à symétrie de révolution c.à.d  $\partial/\partial\varphi = 0$ , la condition  $A_r = A_s = 0$  satisfait les deux équations (II-2) et (II-3). Dans ce cas on a :

$$\left\| \begin{aligned} B_r &= -\frac{\partial A_{\varphi}}{\partial s} \\ B_{\varphi} &= 0 \\ B_s &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_{\varphi})}{\partial r} \end{aligned} \right.$$

Dans la zone centrale du solénoïde de longueur  $l$ , on fait l'hypothèse que le champ est à symétrie de translation donc  $\partial/\partial s = 0$  ce qui implique  $B_r = 0$  et  $B = B_s = \text{cte}$ .

On a  $dt \approx ds/v_s$  où  $v_s$  est constant et  $mv_s = e(B\rho)$  ( $B\rho$  s'appelle la rigidité magnétique)

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{V} = \begin{pmatrix} V_s \\ V_x \\ V_z \end{pmatrix}$$



$$\frac{d\vec{P}}{dt} = e\vec{V} \wedge \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 s}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{eB_s dz}{mv_s ds} = \frac{B_s dz}{B\rho ds} \\ \frac{d^2 z}{ds^2} = -\frac{eB_s dx}{mv_s ds} = -\frac{B_s dx}{B\rho ds} \end{cases}$$

avec  $\kappa = \frac{d}{ds}$  et  $K = \frac{eB_s}{mv_s} = \frac{B_s}{B\rho}$  on a le système couplé

$$\begin{cases} x'' = Kz' \\ z'' = -Kx' \end{cases}$$

Pour résoudre ce système nous posons :

$$\xi = z + jx \text{ et } \eta = z - jx \Rightarrow \xi'' = jK\xi' \text{ et } \eta'' = -jK\eta'$$

$$\xi'' = jK\xi' \Rightarrow \xi' = \xi'_0 e^{jKs} \text{ et } \xi = \xi_0 + \frac{\xi'_0}{jK} (e^{jKs} - 1) \text{ donc :}$$

$$x = x_0 + \frac{z'_0}{K} (1 - \cos Kl) + \frac{x'_0}{K} \sin Kl, \quad z = z_0 - \frac{x'_0}{K} (1 - \cos Kl) + \frac{z'_0}{K} \sin Kl$$

Avec :

$$x' = x'_0 \cos Kl + z'_0 \sin Kl$$

$$z' = z'_0 \cos Kl - x'_0 \sin Kl$$

dans la zone centrale la matrice de transfert s'écrit :

$$M_{\text{centre}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{K} \sin Kl & 0 & \frac{1}{K} (1 - \cos Kl) \\ 0 & \cos Kl & 0 & \sin Kl \\ 0 & -\frac{1}{K} (1 - \cos Kl) & 1 & \frac{1}{K} \sin Kl \\ 0 & -\sin Kl & 0 & \cos Kl \end{pmatrix}$$

### **b) Matrice de transfert du solénoïde à l'entrée et à la sortie**

$$\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot B_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_s}{\partial s} = 0 \text{ or } B_\varphi = 0 \Rightarrow \frac{\partial(r \cdot B_r)}{\partial r} = -\frac{\partial(r \cdot B_s)}{\partial s}$$

$$\Rightarrow B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_s}{\partial s}$$

d'où:

$$B_s = 0$$

$$B_x = B_r \frac{x}{r} = -\frac{x}{2} \frac{\partial B_s}{\partial s} \quad \text{d'où les équations du mouvement}$$

$$B_z = B_r \frac{z}{r} = -\frac{z}{2} \frac{\partial B_s}{\partial s}$$

$$\left| \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{e \cdot v_s \cdot B_z}{m} = \frac{e \cdot v_s \cdot z}{2m} \frac{\partial B_s}{\partial s} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{e \cdot v_s \cdot B_x}{m} = -\frac{e \cdot v_s \cdot x}{2m} \frac{\partial B_s}{\partial s} \end{aligned} \right|$$

soit  $x'' = \frac{z}{2B\rho} \frac{\partial B_s}{\partial s}$  et  $z'' = -\frac{x}{2B\rho} \frac{\partial B_s}{\partial s}$

avec :

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial B_s}{\partial s} &= B_s \delta(s - s_{\text{entrée}}) \quad \text{à l'entrée} \\ \frac{\partial B_s}{\partial s} &= -B_s \delta(s - s_{\text{sortie}}) \quad \text{à la sortie} \end{aligned} \right|$$

l'intégrale des équations  $x''$  et  $z''$  sur la discontinuité de  $B_s$  est :

$$x' - x_0' = \frac{Kz}{2} \quad z' - z_0' = \frac{-Kx}{2} \quad \text{à l'entrée}$$

$$x' - x_0' = \frac{-Kz}{2} \quad z' - z_0' = \frac{Kx}{2} \quad \text{à la sortie}$$

D'où les matrices de transfert d'entrée et de sortie est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \pm \frac{K}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \pm \frac{K}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où : (+) pour entrée et (-) pour sortie et } K = B_s / (B\rho)$$

### **c) Matrice de transfert du solénoïde idéal complet**

$$M_{\text{total}} = M_{\text{sortie}} \cdot M_{\text{centre}} \cdot M_{\text{entrée}} \quad \text{soit}$$

$$M_{\text{total}} = \begin{pmatrix} C^2 & \frac{2}{K} SC & SC & \frac{2}{K} S^2 \\ -\frac{K}{2} SC & C^2 & -\frac{K}{2} S^2 & SC \\ -SC & -\frac{2}{K} S^2 & C^2 & \frac{2}{K} SC \\ \frac{K}{2} S^2 & -SC & -\frac{K}{2} SC & C^2 \end{pmatrix}$$

avec  $C = \cos\theta$ ,  $S = \sin\theta$  et  $\theta = Bl/2(B\rho)$

Cette matrice montre qu'il y a couplage du transport entre les deux plans horizontal et vertical. En effet dans un solénoïde lors de son évolution la particule a un mouvement hélicoïdal, qui représente bien le passage d'un plan à l'autre. La solution pour découpler le transport est d'ajouter un deuxième solénoïde de même force mais de signe inverse.

### III) Matrice faisceau

Dans le plan de phase  $(y, y')$  avec  $y=x$  ou  $z$  l'équation générale de ellipses d'émittance [9] est de la forme :

$$\gamma_y y'^2 + 2\alpha_y y y' + \beta_y y^2 = \varepsilon_y / \pi$$

où :  $\varepsilon_y$  est la surface de l'ellipse,  $\alpha_y$ ,  $\beta_y$  et  $\gamma_y$  sont des coefficients dépendant de  $s$  et liés par la relation  $\beta_y \gamma_y - \alpha_y^2 = 1$

En divisant par  $\varepsilon_y / \pi$  ses 2 membres, cette équation peut se mettre sous la forme matricielle suivant :

$$1 = Y^t \sigma^{-1} Y \quad \text{avec} \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y^t = (y \cdot y') \quad \text{vecteur transposé}$$

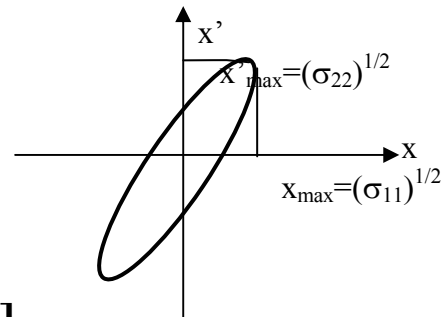
$$\sigma^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_y / \pi} \begin{pmatrix} \gamma_y & \alpha_y \\ \alpha_y & \beta_y \end{pmatrix} \quad \text{on introduit ainsi la matrice } \sigma \text{ appelée « matrice faisceau » qui s'écrit}$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon_y}{\pi} \begin{pmatrix} \beta_y & -\alpha_y \\ -\alpha_y & \gamma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

Ses caractéristiques sont les suivantes :

$$\det \sigma = (\varepsilon_y / \pi)^2$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$



### IV) Transport des ellipses d'émittance [11]

En chaque point de ligne du transport il est important de connaître l'enveloppe et la divergence du faisceau, or l'ellipse de phase en un point  $s$  est caractérisée par les paramètres  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$ ,  $\gamma(s)$  et l'emittance  $\varepsilon$ . Il est donc nécessaire d'établir les lois de transport de ces quantités dans le système optique.

Si  $T$  est la matrice de transfert d'un système optique :

L'équation de l'ellipse en  $s=s_0$  s'écrit:

$$Y_0^t \sigma_0^{-1} Y_0 = I \quad (1)$$

En  $s=s_1$  l'équation de l'ellipse devient :

$$Y_1^t \sigma_1^{-1} Y_1 = I \quad (2) \quad \text{avec } I \text{ matrice unitaire}$$

$$\text{où } Y_1 = T Y_0 \quad ; \quad Y_0^t = T Y_0^t = T^t Y_0^t \quad (3)$$

d'après les équations (1), (2) et (3)

$$\sigma_0^{-1} = T^t \sigma_1^{-1} T \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_1 = T \sigma_0 T^t} \quad (\text{IV-1})$$

Au moyen de cette équation de matrice, on peut déterminer les caractéristiques de l'ellipse en tout point de la ligne optique si nous connaissons ses caractéristiques d'origine ou en un point.

**Exemple :**

Dans le plan  $(x, x')$ , l'équation matricielle IV-1 s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \beta_{S_1} \\ \alpha_{S_1} \\ \gamma_{S_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}^2 & -2T_{11}T_{12} & T_{12}^2 \\ -T_{11}T_{21} & T_{11}T_{22}+T_{12}T_{21} & -T_{12}T_{22} \\ T_{21}^2 & -2T_{21}T_{22} & T_{22}^2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \beta_{S_0} \\ \alpha_{S_0} \\ \gamma_{S_0} \end{pmatrix}$$

**Remarque :**

Quand un faisceau traverse un élément optique linéaire sans accélération, la surface de l'émittance est conservée et les seuls paramètres changés sont les coefficients de l'équation de l'ellipse  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .

## B) Mesure de l'émittance

Pour mesurer de manière indirecte l'émittance à partir des dimensions du faisceau, il existe deux méthodes, l'une utilise la mesure du profil du faisceau en trois points, l'autre la mesure du profil pour au moins trois réglages de la focalisation en un point.

### V) Méthode des trois distances

Cette méthode consiste à mesurer les dimensions du faisceau en trois points d'une section sans champ. Si  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$  sont les dimensions du faisceau respectivement aux positions 1, 2 et 3,  $L_1$  la distance entre la position 1 et la position 2 et  $L_2$  la distance entre les positions 1 et 3 (Voir figure V-1).

On a :  $\phi_1 = (\varepsilon\beta_1/\pi)^{1/2}$  ,  $\phi_2 = (\varepsilon\beta_2/\pi)^{1/2}$  ,  $\phi_3 = (\varepsilon\beta_3/\pi)^{1/2}$

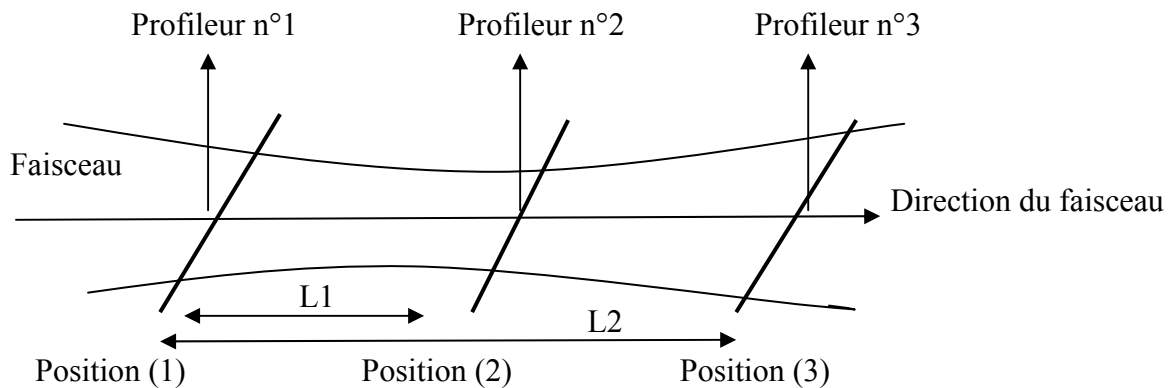


Figure V-1 : Principe des trois distances

De plus, on connaît les relations :

$$\begin{cases} \beta_2 = \beta_1 - 2L_1\alpha_1 + L_1^2\gamma_1 \\ \beta_3 = \beta_1 - 2L_2\alpha_1 + L_2^2\gamma_1 \\ \beta_1\gamma_1 - \alpha_1^2 = 1 \end{cases}$$

De ces relations on tire :

$$\frac{\varepsilon}{\pi} = \frac{\phi_1}{L_2} \sqrt{\phi_3^2 - \left(\phi_1 - \frac{AL_2}{\phi_1}\right)^2}$$

$$\text{Avec } A = \frac{1}{2} \frac{L_1^2(\phi_3^2 - \phi_1^2) - L_2^2(\phi_2^2 - \phi_1^2)}{L_1L_2(L_2 - L_1)}$$

### VI) Méthode des trois gradients

Autant le principe de cette méthode est simple autant son application est délicate. En effet, cette méthode permet de mesurer les dimensions du faisceau en un seul point contrairement à la méthode des trois distances. Elle permet donc d'utiliser un seul profileur (d'où un gain de place et surtout économique). Par contre cette méthode nécessite un élément magnétique permettant de faire varier les dimensions du faisceau au point de mesure. Si cet élément magnétique est un quadripôle les mouvements V et H sont découplés et on peut traiter séparément les mesures dans chacun des plans.

Dans le cas de l'utilisation d'un solénoïde les mouvements V et H sont couplés. Ce couplage pose un certain nombre de problèmes numériques pour la résolution des équations.

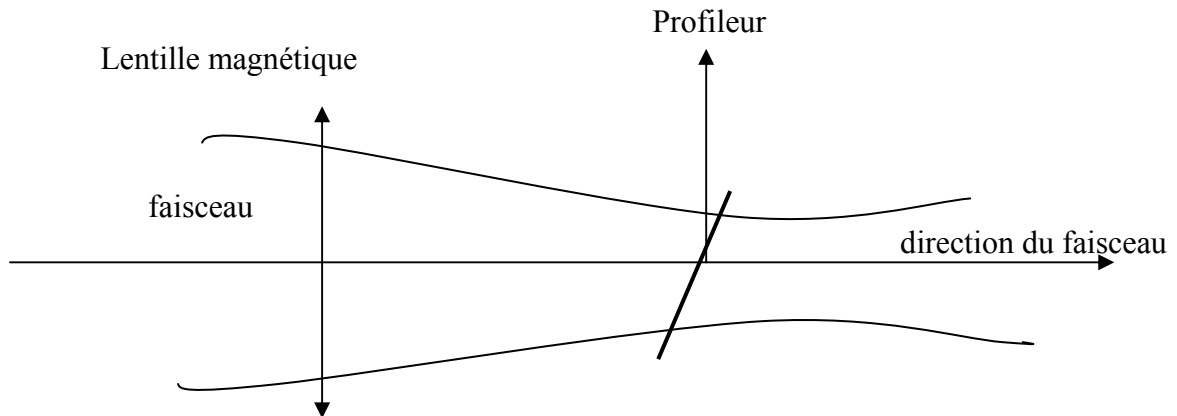


Figure VI-1 : Principe de trois gradients

### **VI-1) Méthode des trois gradients (Cas d'un système où les mouvements H et V sont découplés)**

On suppose connue la matrice de transfert T correspondant à la ligne de transport de faisceau entre les points A et B dans un des plans, par exemple le plan horizontal.

$$\begin{pmatrix} X_B \\ X'_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_A \\ X'_A \end{pmatrix}$$

On a une mesure du profil du faisceau en B et on désire connaître les paramètres de l'ellipse de phase en A. La méthode expérimentale de trois gradients consiste à changer la force d'un élément optique qui existe entre A et B donc les éléments de la matrice de transfert T et à mesurer les différents profils  $\phi$  correspondants en B. D'après ce qui précède pour chaque valeur du champ magnétique on a la relation :

$$\beta_B = \beta_A T_{11}^2 - 2\alpha_A T_{11} T_{12} + \gamma_A T_{12}^2$$

qui peut s'écrire 
$$\phi_B^2 = \beta_A (\varepsilon/\pi) T_{11}^2 - 2\alpha_A (\varepsilon/\pi) T_{11} T_{12} + \gamma_A (\varepsilon/\pi) T_{12}^2$$

avec  $\beta_A \gamma_A - \alpha_A^2 = 1$  on a encore

$$(\varepsilon/\pi) = \beta_A (\varepsilon/\pi) \cdot \gamma_A (\varepsilon/\pi) - (\alpha_A (\varepsilon/\pi))^2$$

Pour déterminer les trois inconnues  $\beta_A (\varepsilon/\pi)$ ,  $\alpha_A (\varepsilon/\pi)$  et  $\gamma_A (\varepsilon/\pi)$  on a besoin d'au moins trois mesures, mais toute mesure est entachée d'erreur, aussi est-il nécessaire d'effectuer un grand nombre de mesures afin d'améliorer la précision des résultats. Il est aussi indispensable d'effectuer les mesures autour du minimum de l'émittance du faisceau (Waist) [12] et de part et d'autre.

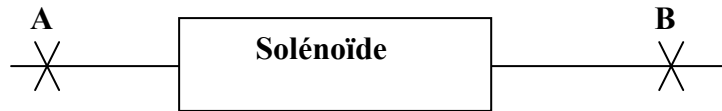
### **VI-2) Méthode des trois gradients (Cas d'un système couplé)**

Le but de ce paragraphe est d'analyser, dans le cas où l'effet des charges d'espace est négligé, les difficultés mathématiques à résoudre pour déterminer l'émittance initiale à partir de la mesure des profils lorsque les mouvements H et V sont couplés. C'est le cas lorsque la focalisation du faisceau est faite par un solénoïde.

## L'idée

On choisit une émittance connue d'avance (par exemple celle de l'article de R. Chehab [13]) et avec le code de calcul BETA [14] (Voir annexe 1 et 2), on détermine pour chaque courant circulant dans le solénoïde le profil du faisceau à une distance  $d$  du système optique. Les profils trouvés vont être considérés comme des résultats expérimentaux. Avec la méthode des moindres carrés on va vérifier qu'on peut reconstruire l'émittance initiale.

**Remarque :** Dans ces calculs notre solénoïde est représenté par 21 petits solénoïdes de longueur 1cm où on suppose que le champ est constant,



Soit

$T$  : la matrice du transfert entre les positions A et B

$\sigma_B$  et  $\sigma_A$  respectivement les matrices du faisceau en position A et B

on a donc

$$\sigma_B = T \cdot \sigma_A \cdot T^t$$

dans le cas où les termes des corrélations sont nuls [15] :

$\sigma_{13}=0, \sigma_{14}=0, \sigma_{23}=0, \sigma_{24}=0, \sigma_{31}=0, \sigma_{32}=0, \sigma_{41}=0$  et  $\sigma_{42}=0$  on a :

$$\sigma_B = \begin{pmatrix} \sigma_{11B} & \sigma_{12B} & 0 & 0 \\ \sigma_{12B} & \sigma_{22B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33B} & \sigma_{34B} \\ 0 & 0 & \sigma_{34B} & \sigma_{44B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11A} & \sigma_{12A} & 0 & 0 \\ \sigma_{12A} & \sigma_{22A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33A} & \sigma_{34A} \\ 0 & 0 & \sigma_{34A} & \sigma_{44A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} & T_{41} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} & T_{42} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} & T_{43} \\ T_{14} & T_{24} & T_{34} & T_{44} \end{pmatrix}$$

Or au point B le système de mesure profil (exemple : mord mobile + cage de Faraday) nous donne uniquement les dimensions du faisceau, donc seules les deux équations ci-dessous sont utiles.

$$(E) \begin{cases} \sigma_{11B} = T_{11}^2 \sigma_{11A} + 2T_{11} \cdot T_{12} \cdot \sigma_{21A} + T_{12}^2 \cdot \sigma_{22A} + T_{13}^2 \cdot \sigma_{33A} + 2 \cdot T_{13} \cdot T_{14} \cdot \sigma_{34A} + T_{14}^2 \cdot \sigma_{44A} \\ \sigma_{33B} = T_{31}^2 \sigma_{11A} + 2T_{31} \cdot T_{32} \cdot \sigma_{21A} + T_{32}^2 \cdot \sigma_{22A} + T_{33}^2 \cdot \sigma_{33A} + 2 \cdot T_{33} \cdot T_{34} \cdot \sigma_{34A} + T_{34}^2 \cdot \sigma_{44A} \end{cases}$$

Par une série de mesures au point B, en faisant varier les éléments de matrice  $T$ , on obtient une série d'équations linéaires dont les inconnues sont les éléments de matrice du faisceau au point A. Théoriquement pour six inconnues il faut au moins six équations dans un plan pour résoudre le système. Mais en pratique il vaut mieux faire un nombre de mesures plus grand pour minimiser au maximum l'erreur de mesure. La méthode utilisée est la méthode de moindres carrés [16].

## **Le principe de méthode de moindres carrés**

Un système de  $n$  équations comme le suivant :

$$\begin{cases} \sigma_{11B}^i = (T_{11}^2)_i \sigma_{11A} + 2T_{11i} \cdot T_{12i} \cdot \sigma_{21A} + (T_{12}^2)_i \sigma_{22A} + (T_{13}^2)_i \sigma_{33A} + 2 \cdot T_{13i} \cdot T_{14i} \cdot \sigma_{34A} + (T_{14}^2)_i \sigma_{44A} \\ i=1 \rightarrow n \end{cases} \quad (VI-1)$$

S'écrit matriciellement de cette façon :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11_{B1}} \\ \sigma_{11_{B2}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_{11_{Bn}} \end{pmatrix} = M^* \begin{pmatrix} \sigma_{11_A} \\ \sigma_{12_A} \\ \sigma_{22_A} \\ \sigma_{33_A} \\ \sigma_{34_A} \\ \sigma_{44_A} \end{pmatrix}$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} T_{11}^2 \cdot (2 \cdot T_{11} \cdot T_{12}) \cdot T_{12}^2 \cdot T_{13}^2 \cdot (2 \cdot T_{13} \cdot T_{14}) \cdot T_{14}^2 \cdot 1 \\ T_{11}^2 \cdot (2 \cdot T_{11} \cdot T_{12}) \cdot T_{12}^2 \cdot T_{13}^2 \cdot (2 \cdot T_{13} \cdot T_{14}) \cdot T_{14}^2 \cdot 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{11}^2 \cdot (2 \cdot T_{11} \cdot T_{12}) \cdot T_{12}^2 \cdot T_{13}^2 \cdot (2 \cdot T_{13} \cdot T_{14}) \cdot T_{14}^2 \cdot n \end{pmatrix}$$

par la méthode de moindres carrés, la solution est la suivante (Voir Annexe 3)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11_A} \\ \sigma_{12_A} \\ \sigma_{22_A} \\ \sigma_{33_A} \\ \sigma_{34_A} \\ \sigma_{44_A} \end{pmatrix} = (M \cdot M^t)^{-1} \cdot M^t \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11_{B1}} \\ \sigma_{11_{B2}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_{11_{Bn}} \end{pmatrix}$$

## VI-2-1) Le cas d'un faisceau rond (à symétrie de révolution)

Si notre faisceau est circulaire et a les mêmes émittances dans les deux plans, c.a.d  $\sigma_{11_A} = \sigma_{33_A}$ ,  $\sigma_{12_A} = \sigma_{34_A}$  et  $\sigma_{22_A} = \sigma_{44_A}$ , l'expression de  $\sigma_{11_B}$  se simplifie et devient :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{11_B}^i = (T_{11}^2 + T_{13}^2) \sigma_{11_A} + 2(T_{11} \cdot T_{12} + T_{13} \cdot T_{14}) \sigma_{21_A} + (T_{12}^2 + T_{14}^2) \sigma_{22_A} \\ i=1 \rightarrow n \end{matrix} \right\}$$

Avec une précision de quatre chiffres après la virgule sur la largeur des profils, trois mesures, donc trois équations suffisent pour déterminer l'émittance initiale avec une erreur qui ne dépasse pas 2% voir la figure VI-1, Si les mesures sont entachées d'erreurs, ce qui est toujours le cas, un plus grand nombre de mesures est indispensable.

### Autre méthode du calcul :

$$\sigma_{11_B} = T_{11}^2 \sigma_{11_A} + 2T_{11} \cdot T_{12} \cdot \sigma_{21_A} + T_{12}^2 \cdot \sigma_{22_A} + T_{13}^2 \cdot \sigma_{33_A} + 2 \cdot T_{13} \cdot T_{14} \cdot \sigma_{34_A} + T_{14}^2 \cdot \sigma_{44_A}$$

Faisceau rond  $\Rightarrow$

$$\sigma_{11_B} = (T_{11}^2 + T_{13}^2) \sigma_{11_A} + 2(T_{11} \cdot T_{12} + T_{13} \cdot T_{14}) \sigma_{21_A} + (T_{12}^2 + T_{14}^2) \sigma_{22_A}$$

$$\text{Soit } L = (\sigma_{11})^{1/2} = (\varepsilon\beta/\pi)^{1/2} \Rightarrow L^2 = \sigma_{11} = \varepsilon\beta/\pi$$



$$L^2 = (T_{11}^2 + T_{13}^2) \varepsilon \beta_A / \pi + 2(T_{11} \cdot T_{12} + T_{13} \cdot T_{14}) (-\varepsilon \alpha_A / \pi) + (T_{12}^2 + T_{14}^2) (\varepsilon \gamma_A / \pi)$$

$$\text{Or } \beta \gamma - \alpha^2 = 1 \Rightarrow \gamma = (1 + \alpha^2) / \beta \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (\pi \beta_A L^2) / \varepsilon &= (T_{11}^2 + T_{13}^2) \beta_A^2 - 2(T_{11} \cdot T_{12} + T_{13} \cdot T_{14}) (\alpha_A \beta_A) + (T_{12}^2 + T_{14}^2) (1 + \alpha_A^2) \\ &= (T_{12}^2 + T_{14}^2) + (T_{11} \beta_A - T_{12} \alpha_A)^2 + (T_{13} \beta_A - T_{14} \alpha_A)^2 \\ &= (T_{12}^2 + T_{14}^2) (1 + ((T_{11}/T_{12}) \beta_A - \alpha_A)^2) \quad \text{car } \mathbf{(T_{11}/T_{12}) = (T_{13}/T_{14})} \quad (\text{Voir Annexe 4}) \end{aligned}$$

Donc :

$$(L^2 / (T_{12}^2 + T_{14}^2)) = \varepsilon / \beta_A \pi + \varepsilon \beta_A / \pi (T_{11}/T_{12} - \alpha_A / \beta_A)^2$$

Soit  $(L^2 / (T_{12}^2 + T_{14}^2)) = \eta^2$  et  $\eta_0^2 = \varepsilon / \beta_A \pi$ ,  $\lambda^2 = \varepsilon \beta_A / \pi$ ,  $\xi = T_{11}/T_{12}$  et  $\xi_0 = \alpha_A / \beta_A$  Donc

$$\eta^2 = \eta_0^2 + \lambda^2 (\xi - \xi_0)^2$$

Pour déterminer  $\eta_0$ ,  $\lambda$  et  $\xi_0$  trois mesures suffisent, ce qui est prouvé numériquement.

$$\varepsilon = \eta_0 \lambda$$

*Dans le cas d'un faisceau rond, des mesures dans un seul plan suffisent pour déterminer l'émittance avec la méthode de 3 gradients en utilisant un solénoïde comme élément focalisant.*

**Figure VI-1: Erreur en fonction de la précision numérique (trois mesures, faisceau rond)**



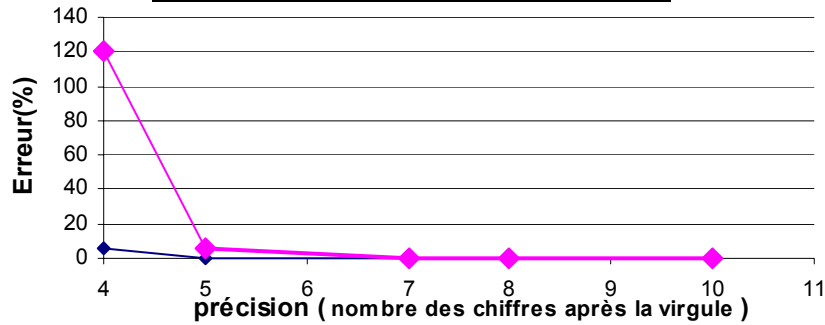
## VI-2-2) Le cas d'un faisceau non rond

### VI-2-2-1) Mesures dans un seul plan

La Figure VI-2 représente l'erreur calculée en fonction de la précision des mesures dans le cas d'un faisceau non rond, sur cette figure on constate que si on arrive à déterminer l'émittance dans un plan on perd dans l'autre plan. Dans le cas d'un faisceau non rond c'est la précision des mesures qui est déterminante et non le nombre des mesures car  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{33}$  n'ont pas le même poids ( $T_{11} \ll T_{13}$ ). En pratique la précision requise (au moins 10 chiffres après la virgule) est irréalisable expérimentalement.

*Donc des mesures dans un seul plan ne suffisent pas pour déterminer les émittances.*

**Figure VI-2 : Erreur en fonction de la précision numérique (trois mesures dans chaque plan)**



**VI-2-2-2) Mesures dans deux plans perpendiculaires en une même position**

Pour un solénoïde on a :  $T_{11}=T_{33}$ ,  $T_{12}=T_{34}$ ,  $T_{21}=T_{43}$ ,  $T_{22}=T_{44}$ ,  $T_{13}=-T_{31}$  et  $T_{14}=-T_{32}$

$$(E) \begin{cases} \sigma_{11B} = T_{11}^2 \sigma_{11A} + 2T_{11}.T_{12}.\sigma_{21A} + T_{12}^2.\sigma_{22A} + T_{13}^2.\sigma_{33A} + 2.T_{13}.T_{14}.\sigma_{34A} + T_{14}^2.\sigma_{44A} \\ \sigma_{33B} = T_{13}^2 \sigma_{11A} + 2T_{13}.T_{14}.\sigma_{21A} + T_{14}^2.\sigma_{22A} + T_{11}^2.\sigma_{33A} + 2.T_{11}.T_{12}.\sigma_{34A} + T_{12}^2.\sigma_{44A} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \sigma_{11B} - \sigma_{33B} = (T_{11}^2 - T_{13}^2)_i (\sigma_{11A} - \sigma_{33A}) + (2T_{11}.T_{12} - 2.T_{13}.T_{14})_i (\sigma_{21A} - \sigma_{34A}) + (T_{12}^2 - T_{14}^2)_i (\sigma_{22A} - \sigma_{44A}) \\ \sigma_{11B} + \sigma_{33B} = (T_{11}^2 + T_{13}^2)_i (\sigma_{11A} + \sigma_{33A}) + 2(T_{11}.T_{12} + T_{13}.T_{14})_i (\sigma_{21A} + \sigma_{34A}) + (T_{12}^2 + T_{14}^2)_i (\sigma_{22A} + \sigma_{44A}) \end{cases}$$

$i=1 \rightarrow n$

Si on arrive à déterminer à partir de n équations linéaires indépendantes du premier type les quantités  $(\sigma_{11A} - \sigma_{33A})$ ,  $(\sigma_{21A} - \sigma_{34A})$  et  $(\sigma_{22A} - \sigma_{44A})$  et idem à partir du deuxième type d'équations les quantités  $(\sigma_{11A} + \sigma_{33A})$ ,  $(\sigma_{21A} + \sigma_{34A})$  et  $(\sigma_{22A} + \sigma_{44A})$ , une simple addition et soustraction suffit pour déterminer les éléments de matrice de  $\sigma$  au point A donc l'émission horizontale et verticale.

La figure VI-3, montre la variation de  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{33}$  en fonction de l'intensité du courant du solénoïde, comme l'indique la courbe de la figure VI-4, trois mesures dans chaque plan suffisent à déterminer l'émission initiale avec une erreur qui ne dépasse pas 0.4% si on prend une précision de quatre chiffres après la virgule.

**Donc pour déterminer l'émission d'un faisceau non rond des mesures verticales et horizontales sont nécessaires.**

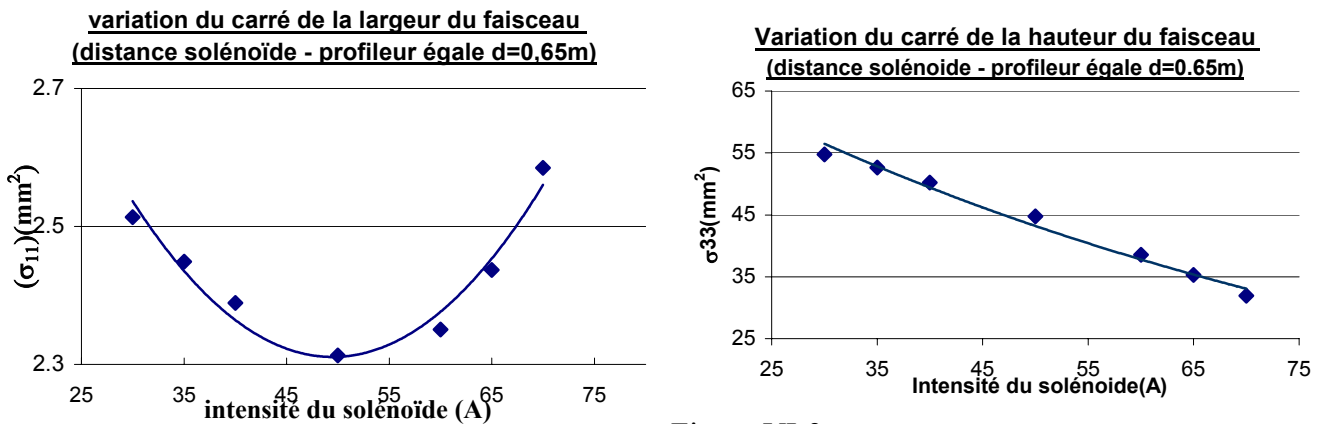


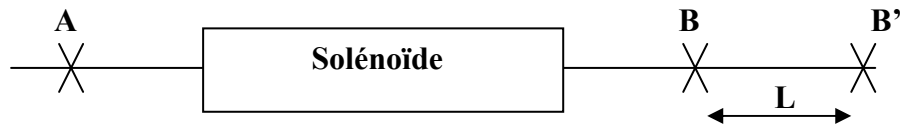
Figure VI-3

**Figure VI-4 : Erreur en fonction de la précision numérique (trois mesures, faisceau non rond)**



**V-2-2-3) Mesures dans deux plans perpendiculaires en deux positions distincts**

Dans ce cas les deux plans de mesure sont séparés par une distance de longueur L voir la figure ci-dessous.



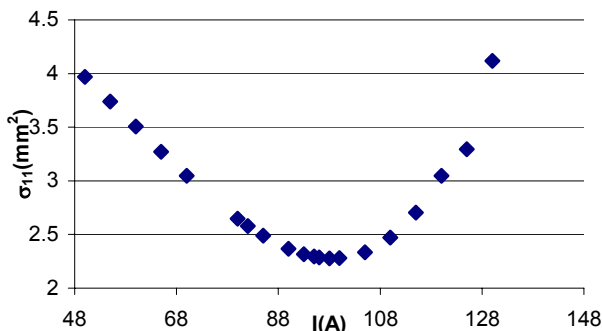
$$(E) \begin{cases} \sigma_{11B} = T_{11}^2 \sigma_{11A} + 2T_{11}.T_{12}.\sigma_{21A} + T_{12}^2.\sigma_{22A} + T_{13}^2.\sigma_{33A} + 2.T_{13}.T_{14}.\sigma_{34A} + T_{14}^2.\sigma_{44A} \\ \sigma_{33B'} = T'_{31}{}^2 \sigma_{11A} + 2T'_{31}.T'_{32}.\sigma_{21A} + T'_{32}{}^2.\sigma_{22A} + T'_{33}{}^2.\sigma_{33A} + 2.T'_{33}.T'_{34}.\sigma_{34A} + T'_{34}{}^2.\sigma_{44A} \end{cases}$$

Dans ce cas la propriété exploitée au paragraphe précédent n'existe plus et par suite la simplification est impossible car :

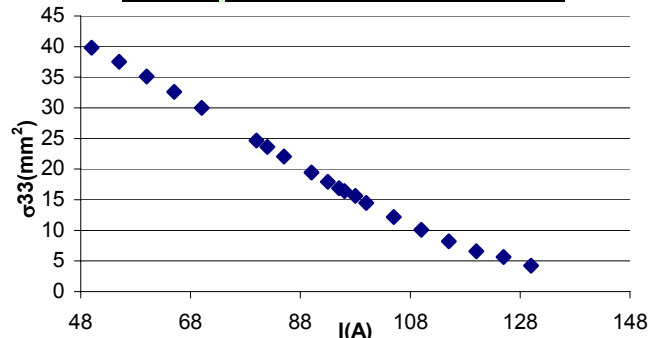
$$T'_{33} = T_{11} + LT_{43} \neq T_{11}, \quad T'_{31} = -T_{13} + LT_{42} \neq -T_{13}, \quad T'_{34} = T_{12} + LT_{44} \neq T_{12}, \quad T'_{32} = -T_{14} + LT_{42} \neq -T_{14}$$

Donc pour déterminer l'émittance, la résolution de deux expressions avec n séries des mesures est nécessaire. Avec les points de la figure VI-5, pour avoir un résultat à 1% près, il faut un grand nombre de mesures (au moins 17 mesures dans chaque plan) même si on néglige l'erreur, voir la figure V-6. Pour trois mesures dans chaque plan on a besoin d'une grande précision ( plus que cinq chiffres après la virgule), une précision qu'on ne peut pas réaliser expérimentalement.

**Variation du carrée de la largeur du faisceau dans le plan horizontal (d=0.44m)**



**Variation du carrée de la hauteur du faisceau dans le plan vertical (d=0.44m)**



**Figure VI-5**

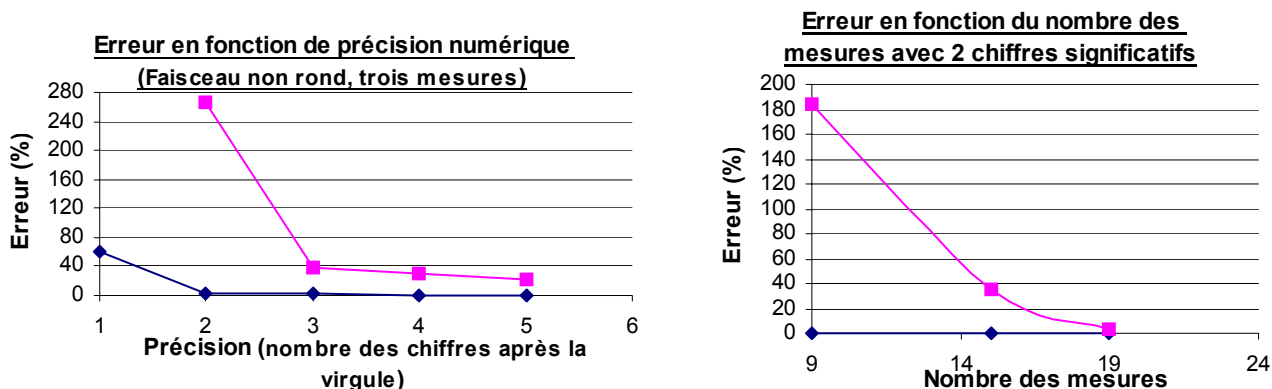


Figure VI-6

***Dans le cas où les deux plans des mesures sont distincts pour avoir un résultat à 1% près, il faut au moins 17 mesures dans chaque plan (2 chiffres significatifs).***

Dans ce qui suit on se propose de quantifier l'erreur faite sur la valeur des émittances lorsqu'on fait l'hypothèse que la mesure des profils est effectuée juste au milieu des deux plans B et B' et non pas en B et B'. Dans notre cas la distance BB' est égale à 5cm.

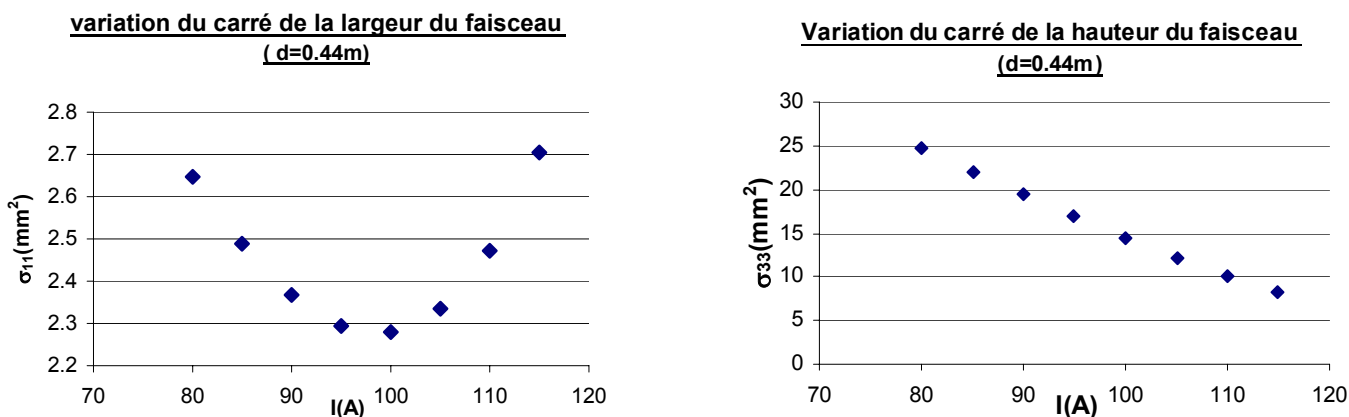


Figure VI-7

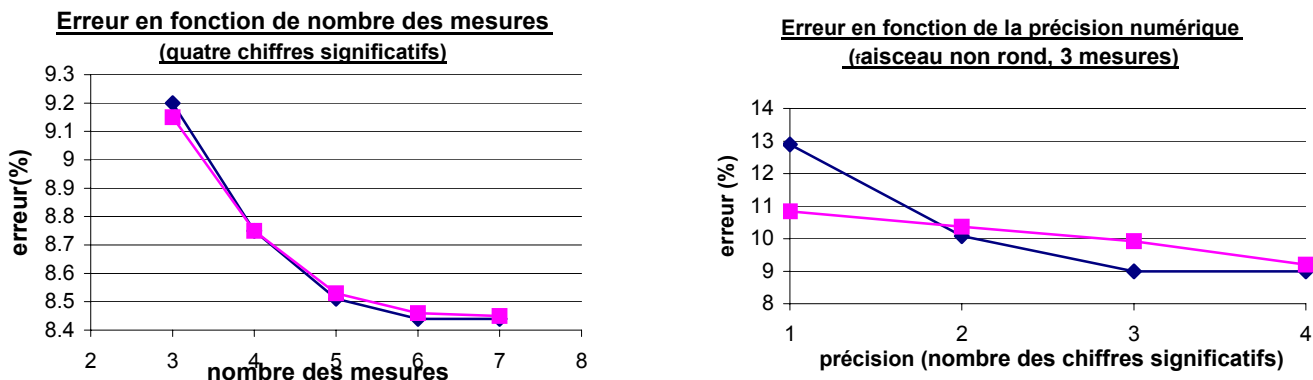


Figure VI-8

Avec les points des mesures de la figure VI-7 (8 mesures), on trouve une erreur d'ordre 8,5% (Annexe 4) ce qui est un résultat acceptable.

***Donc la supposition que les mesures sont faites dans le plan milieu peut être une solution pour surmonter les difficultés posées par des mesures faites dans deux plans distincts.***

## VII) Conclusion

Dans le cas d'un système optique où les mouvements H et V sont couplés par un solénoïde, la détermination par la méthode de trois gradients des émittances du faisceau lorsqu'elles ne sont pas égales exige des mesures dans deux plans. Si les émittances sont égales et si le faisceau est à symétrie de révolution, des mesures dans un seul plan sont suffisantes.

Dans le cas où les deux plans des mesures sont distincts, pour arriver à construire l'émittance initiale à 1%, il faut plus de 17 mesures dans chaque plan et il est souhaitable que la majorité des mesures soit au minimum de l'enveloppe du faisceau. Expérimentalement cela est très difficile car à cet endroit la courbe est presque horizontale et une précision de quatre chiffres significatifs est impossible. Si un résultat avec une erreur d'ordre 8.5% est acceptable pour déterminer l'émittance, la supposition que les mesures sont faites dans le plan milieu peut être la solution.

Pour surmonter les difficultés dues à l'utilisation d'un solénoïde comme système optique, on peut utiliser deux solénoïdes à champ opposé pour annuler la rotation du faisceau ou remplacer le solénoïde par un quadripôle.

Ces résultats seront exploités pour mesurer l'émittance à la sortie du groupeur de la station NEPAL qui constituera la partie injection du projet ALTO.

## Remerciements

Je remercie très cordialement Monsieur **A. Tkatchenko** qui a assuré l'encadrement technique et pédagogique de ce travail, il m'a beaucoup aidé et conseillé pour la rédaction de ce rapport.

Je remercie vivement **J. Lesrel** pour l'aide technique que j'ai trouvé auprès de lui afin de surmonter les difficultés rencontrées lors de l'analyse des résultats.

Je remercie encore **J.L. Coacolo** qui été toujours disponible pour répondre à toutes mes questions.

## Références

- [1] **S. Essabaa, S. Mgarrech et al.** The study of new PARRNe experimental area using an electron LINAC closed to the Orsay Tandem, Proceeding of EPAC 2002, Paris, France.
- [2] **R. Ferdinand, P.-Y. Beauvais, D. Bogard, R. Gobin, B. Pottin,** Non-Interceptive émittance measurement of high intensity beam at low energy, LINAC 98 Chicago.
- [3] **E. Wilson :** Traverse beam dynamics. CERN 94-01, 26 January 1994, Vol.I
- [4] **Pierre Germain :** Introduction aux accélérateurs des particules. CERN 89-07
- [5] **J. Buon Beam :** phase space and emittance. CERN 94-01, 26 January 1994 VOLI
- [6] **J.Arianer :** Les sources des particules chargées. DEA-PTGI CNRS-FP IN2P3 JUAS&CAS-CERN FANTOM 1999.
- [7] **Martin Reiser :** Theory and design of charged particle beams, A Wiley-interscience Publication.
- [8] **K.T. McDonald and D.P. Russell :** Methods of Emittance Measurement, Princeton University, Princeton, NJ 08544
- [9] **P.Schmuser, J. Rossbach :** Basic cours on accelerateur optics. CERN 94/01. Vol I
- [10] **A.Tkatchenko :** Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique (courbure et focalisation transverse) (DEA.GI.2000-2001).
- [11] **J.Parain :** Comparaison de deux méthodes pour mesurer l'émittance d'un faisceau. Département du synchrotron saturne. Section d'optique Corpusculaire 2 Mars 1970, SOC / UTI-19.
- [12] **Jean Dieudomé :** Calcul infinitésimal, Hermann, collection méthodes.
- [13] **R.Chehab, M.Taurigna, G.Bienvenu :** Beam Emittance Determination Using optical transition Radiation.
- [14] **L. Farvacque, J.L Laclare, A. Ropert :** BETA USERS' GUIDE, ESRF-SR/LAT-88-08
- [15] **John Rees and Lenny Rivkin :** On measuring emittances and sigma matrices, SLAC-PUB-3305, SLAC/AP-18, March 1984.
- [16] **R. Théodor :** Initiation à l'analyse numérique, CNAM cours A, préface de P. LASCEAUX, 3<sup>ème</sup> édition, MASSON 1989.

# Annexes

## Annexe 1 :

### Code de calcul BETA

Le code de calcul BETA a été initialement élaboré par le groupe théorie du Laboratoire National Saturne (LNS) puis perfectionné à l'ESRF [14] ainsi qu'au LNS au DAPNIA/CEA.

C'est un code de transport de particules utilisant le formalisme matriciel au second ordre. Ce programme fonctionne en mode interactif et dispose de nombreuses sorties graphiques. A l'IPNO, il fonctionne sous UNIX.

De nombreuses options permettent de traiter les problèmes associés à l'optique des machines circulaires ( Synchrotrons, anneaux de stockage) ou des lignes de transport des faisceaux.

- Calcul des matrices de transfert au 1<sup>er</sup> et 2<sup>nd</sup> ordre
- Paramètres de mailles des structures périodiques (nombre d'ondes, paramètres de TWISS, fonction dispersion, etc.....)
- Calcul des effets non-linéaires dans les accélérateurs circulaires (glissement des nombres d'ondes en fonction de l'amplitude des oscillations, chromaticités...)
- Calculs spécifiques aux anneaux de stockage sources de rayonnement synchrotron (émittances d'équilibre, couplage, constantes de temps d'amortissement des émittances.....)

Il dispose également de routines de minimisation permettant d'optimiser les valeurs de nombreux paramètres optiques.



## Annexe 2 :

### Exemple de fichier d'entrée pour le code BETA

```
*** VERSION ***
BETA-LNS v4.92 /12/01/98/ 04-Mar-02
*** TITRE ***
Solénoïde pour I=61 A
*** LIST OF ELEMENTS ***
12
SO1      SO 0.100000E-01 0.301383E-01
SO2      SO 0.100000E-01 0.497283E-01
SO3      SO 0.100000E-01 0.858943E-01
SO4      SO 0.100000E-01 0.173295E+00
SO5      SO 0.100000E-01 0.351112E+00
SO6      SO 0.100000E-01 0.708251E+00
SO7      SO 0.100000E-01 0.125074E+01
SO8      SO 0.100000E-01 0.184296E+01
SO9      SO 0.100000E-01 0.226942E+01
SO10     SO 0.100000E-01 0.249395E+01
SO11     SO 0.100000E-01 0.256176E+01
SD1      SD 0.440000E+00
*** STRUCTURE ***
22
SO1      SO2      SO3      SO4      SO5      SO6      SO7      SO8      SO9      SO10
SO11     SO10     SO9      SO8      SO7      SO6      SO5      SO4      SO3      SO2
SO1      SD1
1
*** OPTION ***
BEAM
*** BEAM-MATRIX ***
2.11600E-05
-1.69100E-05 1.44400E-05
0.00000E+00 0.00000E+00 2.11600E-05
0.00000E+00 0.00000E+00 1.69100E-05 1.44400E-05
0.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00
*** PARTICLE TYPE ***
E
*** ENERGIE CINETIQUE (MeV) ***
4.8000E+00
0.511003
```



### Annexe 3 :

#### Le principe de la méthode des moindres carrés

Soit  $P : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$

$$x \rightarrow a_0 U_0(x) + a_1 U_1(x) + \dots + a_n U_n(x)$$

Pour déterminer  $P(x)$ , il suffit de déterminer  $a = a_i \in \mathfrak{R}^{n+1} \quad 0 \leq i \leq n \Rightarrow a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$

On suppose que les  $(n+1)$  fonctions  $U_i(x)$  sont données et sont linéairement indépendantes, généralement on choisit  $U_p(x) = x^p$ , pour  $0 \leq p \leq n$ .

Si on connaît  $(k+1)$  couples  $(x_i, y_i)$  avec  $y_i = a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n$ , l'erreur quadratique obtenue en

remplaçant  $U_i(x)$  par  $x_i$  avec  $0 \leq i \leq n$  pour  $(k+1)$  couples est  $J(a) = \sum_{i=0}^k r_i^2$  avec  $r_i = y_i - P(x_i)$ .

Le meilleur ajustement proposé consiste à minimiser  $J(a)$ .

$J(a) = \sum_{i=0}^k r_i^2$  est la norme euclidienne dans  $\mathfrak{R}^{k+1}$

$$r = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_k \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \text{ or } y_i = \sum_{i=0}^n x_i^i a_i \Rightarrow y = Ua$$

$\left\{ \begin{array}{l} a : \text{matrice 1 ligne et } (n+1) \text{ colonnes} \\ y : \text{matrice } (k+1) \text{ lignes et 1 colonne} \end{array} \right. \Rightarrow U : \text{matrice de } (n+1) \text{ colonnes et } (k+1) \text{ lignes}$

Dans le cas  $U_p(x) = x^p$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & X_0 & \dots & X_0^n \\ 1 & X_1 & \dots & X_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_k & \dots & X_k^n \end{pmatrix}$$

$J(a)$  est la norme euclidienne de  $r_i$  dans  $\mathfrak{R}^{k+1}$

$$J(a) = \|r\|^2 = \langle r/r \rangle = \langle y - Ua / y - Ua \rangle$$

$J(a)$  est minimum  $\Rightarrow J(a) \leq J(a + \varepsilon b)$ ,  $\forall \varepsilon \in \mathfrak{R} - \{0\}$  et  $\forall b \in \mathfrak{R}^{n+1}$

Donc  $\langle y-Ua/y-Ua \rangle \leq \langle y-U(a+\epsilon b)/y-U(a+\epsilon b) \rangle \Rightarrow$

$$\langle y-Ua/y-Ua \rangle \leq \langle y-U(a)-\epsilon U(b)/y-U(a)-\epsilon U(b) \rangle \Rightarrow$$

$$\langle y-Ua/y-Ua \rangle \leq \langle y-U(a)/y-U(a) \rangle - \epsilon \langle y-Ua/Ub \rangle - \epsilon \langle Ub/y-Ua \rangle + \epsilon^2 \langle Ub/Ub \rangle \Rightarrow$$

$$0 \leq -2\epsilon \langle y-Ua/Ub \rangle + \epsilon^2 \langle Ub/Ub \rangle$$

Prenons  $\epsilon > 0$ , divisant par  $2\epsilon$  et faisant tendre  $\epsilon$  vers zéro  $\Rightarrow$  (1)  $0 \leq -\langle y-Ua/Ub \rangle$

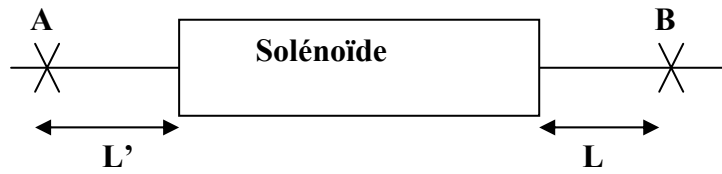
Prenons  $\epsilon < 0$ , divisons par  $2\epsilon$  et faisant tendre  $\epsilon$  vers zéro  $\Rightarrow$  (2)  $0 \geq -\langle y-Ua/Ub \rangle$

(1) et (2)  $\Rightarrow \langle y-Ua/Ub \rangle = 0$  soit  $U^T$  la transposée de  $U \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle U^T y - U^T U a / b \rangle = 0 \\ \forall b \in \mathfrak{R}^{n+1} \end{array} \right.$$

$$U^T y - U^T U a = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{a} = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y}}$$

## Annexe 4:



Si

T : la matrice du transfert entre les positions A et B

On a :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} C^2 & \frac{SC}{K} & SC & \frac{S^2}{K} \\ -KSC & C^2 & -KS^2 & SC \\ -SC & \frac{-S}{K} & C^2 & \frac{SC}{K} \\ KS^2 & -SC & -KSC & C^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & L' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} C^2 - KLSC & (L+L')C^2 - KLL'SC + \frac{SC}{K} & SC - KLS^2 & (L+L')SC + \left(\frac{1}{K} - KLL'\right)S^2 \\ -KSC & -L'KSC + C^2 & -KS^2 & SC - LKS^2 \\ -SC + LKS^2 & -(L+L')SC + \left(KLL' - \frac{1}{K}\right)S^2 & -KLSC + C^2 & \left(\frac{1}{K} - KLL'\right)SC + (L+L')C^2 \\ KS^2 & -SC + L'KS^2 & -KSC & -LKSC + C^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{T_{11}}{T_{12}} = \frac{-KLSC + C^2}{(L+L')C^2 + \left(\frac{1}{K} - KLL'\right)S^2} = \frac{KC - LSK^2}{(1 - LL'K^2)S + K(L+L')C}$$

$$\frac{T_{13}}{T_{14}} = \frac{SC - KLS^2}{(L+L')SC + \left(\frac{1}{K} - KLL'\right)S^2} = \frac{KC - LSK^2}{(1 - LL'K^2)S + K(L+L')C}$$

$$T_{11}/T_{12} = T_{13}/T_{14}$$

## Annexe 5

### Cas d'un faisceau non rond (mesures dans deux plans perpendiculaires)

$$Nb := 7$$

$$i := 0.. Nb$$

$$\sigma_{11s_i} :=$$

$$\sigma_{33s_i} :=$$

$$T_{11i} :=$$

0.5828
0.5317
0.478
0.422
0.3642
0.3041
0.242
0.178

$$T_{12i} :=$$

0.609
0.6017
0.5932
0.5843
0.575
0.5652
0.5551
0.5447

$$T_{13i} :=$$

0.1653
0.1608
0.153
0.1438
0.1311
0.1154
0.09662
0.07461

$$T_{14i} :=$$

0.173
0.182
0.1906
0.199
0.207
0.2145
0.2217
0.2285

$7.8593 \cdot 10^{-7}$
$5.5807 \cdot 10^{-7}$
$4.1058 \cdot 10^{-7}$
$3.6231 \cdot 10^{-7}$
$4.3369 \cdot 10^{-7}$
$6.4684 \cdot 10^{-7}$
$1.0256 \cdot 10^{-6}$
$1.5957 \cdot 10^{-6}$

$1.4085 \cdot 10^{-6}$
$9.8673 \cdot 10^{-7}$
$7.1576 \cdot 10^{-7}$
$6.2232 \cdot 10^{-7}$
$7.3353 \cdot 10^{-7}$
$1.0767 \cdot 10^{-6}$
$1.679 \cdot 10^{-6}$
$2.5681 \cdot 10^{-6}$

$$\Lambda_{11s_i} := \sigma_{11s_i} + 0 \cdot \log[10^{(-1)^{i+1}}] \cdot \frac{\sigma_{11s_i}}{100}$$

$$\Lambda_{33s_i} := \sigma_{33s_i} + 0 \cdot \log[10^{(-1)^{i+1}}] \cdot \frac{\sigma_{33s_i}}{100}$$

$$T_i := \Lambda_{11s_i} + \Lambda_{33s_i}$$

$$L_i := \Lambda_{11s_i} - \Lambda_{33s_i}$$

$$A_i := (T_{11i})^2 - (T_{13i})^2 \quad B_i := 2 \cdot T_{11i} \cdot T_{12i} - 2 \cdot T_{13i} \cdot T_{14i}$$

$$C_i := (T_{12i})^2 - (T_{14i})^2 \quad D_i := (T_{11i})^2 + (T_{13i})^2$$

$$E_i := 2 \cdot T_{11i} \cdot T_{12i} + 2 \cdot T_{13i} \cdot T_{14i} \quad F_i := (T_{12i})^2 + (T_{14i})^2$$

$$LT := \begin{pmatrix} L_0 & T_0 \\ L_1 & T_1 \\ L_2 & T_2 \\ L_3 & T_3 \\ L_4 & T_4 \\ L_5 & T_5 \\ L_6 & T_6 \\ L_7 & T_7 \end{pmatrix} \quad L := \begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \end{pmatrix} \quad T := \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{11s_i} =$$

$359 \cdot 10^{-7}$
$581 \cdot 10^{-7}$
$106 \cdot 10^{-7}$
$623 \cdot 10^{-7}$
$337 \cdot 10^{-7}$
$468 \cdot 10^{-7}$
$026 \cdot 10^{-6}$
$596 \cdot 10^{-6}$

$$\Lambda_{33s_i} =$$

$408 \cdot 10^{-6}$
$867 \cdot 10^{-7}$
$158 \cdot 10^{-7}$
$223 \cdot 10^{-7}$
$335 \cdot 10^{-7}$
$077 \cdot 10^{-6}$
$679 \cdot 10^{-6}$
$568 \cdot 10^{-6}$

$$M_{0,0} := \sum_{i=0}^{Nb} [(A_i)^2]$$

$$M_{0,1} := \sum_{i=0}^{Nb} (A_i \cdot B_i)$$

$$M_{0,2} := \sum_{i=0}^{Nb} (A_i \cdot C_i)$$

$$M_{1,2} := \sum_{i=0}^{Nb} (B_i \cdot C_i)$$

$$M_{1,1} := \sum_{i=0}^{Nb} [(B_i)^2]$$

$$N_{1,2} := \sum_{i=0}^{Nb} (E_i \cdot F_i)$$

$$M_{1,0} := \sum_{i=0}^{Nb} (A_i \cdot B_i)$$

$$M_{2,1} := \sum_{i=0}^{Nb} (B_i \cdot C_i)$$

$$M_{2,2} := \sum_{i=0}^{Nb} [(C_i)^2]$$

$$M_{2,0} := \sum_{i=0}^{Nb} (A_i \cdot C_i)$$

$$N_{0,0} := \sum_{i=0}^{Nb} [(D_i)^2]$$

$$N_{0,1} := \sum_{i=0}^{Nb} (D_i \cdot E_i)$$

$$N_{2,0} := \sum_{i=0}^{Nb} (D_i \cdot F_i)$$

$$N_{0,2} := \sum_{i=0}^{Nb} (D_i \cdot F_i)$$

$$N_{1,0} := \sum_{i=0}^{Nb} (D_i \cdot E_i)$$

$$N_{1,1} := \sum_{i=0}^{Nb} [(E_i)^2]$$

$$N_{2,1} := \sum_{i=0}^{Nb} (E_i \cdot F_i)$$

$$N_{2,2} := \sum_{i=0}^{Nb} [(F_i)^2]$$

$$M = \begin{pmatrix} 0.253 & 0.607 & 0.377 \\ 0.607 & 1.509 & 0.989 \\ 0.377 & 0.989 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$|M| = 7.121 \times 10^{-5}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0.372 & 0.906 & 0.574 \\ 0.906 & 2.298 & 1.547 \\ 0.574 & 1.547 & 1.135 \end{pmatrix}$$

$$\text{VL} := \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\text{Nb}} A_i \cdot L_i \\ \sum_{i=0}^{\text{Nb}} B_i \cdot L_i \\ \sum_{i=0}^{\text{Nb}} C_i \cdot L_i \end{pmatrix} \quad \text{VT} := \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\text{Nb}} D_i \cdot T_i \\ \sum_{i=0}^{\text{Nb}} E_i \cdot T_i \\ \sum_{i=0}^{\text{Nb}} F_i \cdot T_i \end{pmatrix} \quad \text{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.092 \times 10^3 & -723.278 & 433.354 \\ -723.278 & 487.921 & -299.663 \\ 433.354 & -299.663 & 191.326 \end{pmatrix}$$

$$\text{M} \cdot \text{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1.311 \times 10^{-14} & 3.65 \times 10^{-15} \\ 2.015 \times 10^{-14} & 1 & 6.023 \times 10^{-15} \\ 3.089 \times 10^{-14} & 1.436 \times 10^{-14} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{N}^{-1} \cdot \text{VT} = \begin{pmatrix} 5.708 \times 10^{-5} \\ -4.176 \times 10^{-5} \\ 3.313 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \quad \text{M}^{-1} \cdot \text{VL} = \begin{pmatrix} -1.903 \times 10^{-5} \\ 1.392 \times 10^{-5} \\ -1.104 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$|\text{M}| = 7.121 \times 10^{-5}$$

$$\begin{pmatrix} \text{O} \\ \text{P} \\ \text{Q} \end{pmatrix} := \text{M}^{-1} \cdot \text{VL}$$

$$\begin{pmatrix} \text{X} \\ \text{Y} \\ \text{Z} \end{pmatrix} := \text{N}^{-1} \cdot \text{VT}$$

$$\begin{pmatrix} \text{O} & \text{X} \\ \text{P} & \text{Y} \\ \text{Q} & \text{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.903 \times 10^{-5} & 5.708 \times 10^{-5} \\ 1.392 \times 10^{-5} & -4.176 \times 10^{-5} \\ -1.104 \times 10^{-5} & 3.313 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11} := \frac{\text{O} + \text{X}}{2}$$

$$\sigma_{33} := \text{X} - \sigma_{11}$$

$$\sigma_{12} := \frac{\text{P} + \text{Y}}{2}$$

$$\sigma_{34} := \text{Y} - \sigma_{12}$$

$$\sigma_{22} := \frac{\text{Q} + \text{Z}}{2}$$

$$\sigma_{44} := \text{Z} - \sigma_{22}$$

$$\sigma := \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{34} \\ \sigma_{44} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon := \sqrt{(\sigma_{11} \cdot \sigma_{22}) - \sigma_{12} \cdot \sigma_{12}}$$

$$\varepsilon_1 := \sqrt{\sigma_{33} \cdot \sigma_{44} - \sigma_{34} \cdot \sigma_{34}}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1.903 \times 10^{-5} \\ -1.392 \times 10^{-5} \\ 1.104 \times 10^{-5} \\ 3.806 \times 10^{-5} \\ -2.784 \times 10^{-5} \\ 2.208 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = 4.047 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_0 := 4.42 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_1 = 8.093 \times 10^{-6}$$

$$p1 := \frac{100 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon_0}$$

$$p2 := \frac{100 \cdot (\varepsilon_1 - 2\varepsilon_0)}{2\varepsilon_0}$$

$$p1 = -8.441$$

$$p2 = -8.456$$